Plaquette 2 – Équations et inéquations trigonométriques

Trigonométrie — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

On ramène chaque équation à l'une des formes de base $\cos a = \cos b$, $\sin a = \sin b$, $\tan a = \tan b$, en utilisant les formules d'addition, de duplication ou de transformation somme-produit, ou un changement d'inconnue ($X = \cos x$, $t = \tan\frac{x}{2}$). On écrit **toutes** les familles de solutions, puis on sélectionne celles de l'intervalle demandé en les plaçant sur le cercle. Pour une inéquation, on lit l'arc solution sur le cercle.

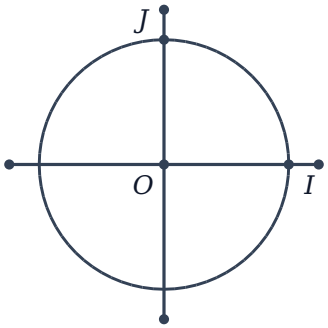
Exercice 1 – Égalité de deux cosinus

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

b) Donner les solutions dans $[0, 2\pi[$ et les placer sur le cercle.

c) Combien y a-t-il de solutions dans $[0, 2\pi[$ pour chacune des deux familles ?

d) Vérifier une des solutions numériquement.



Cercle trigonométrique à compléter

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

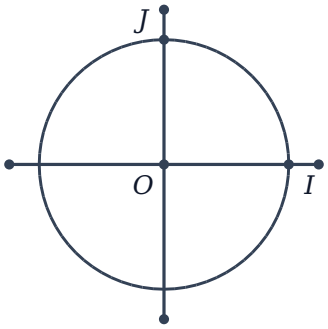
Exercice 2 – Sinus contre cosinus

a) Écrire $\cos x$ comme un sinus.

b) Résoudre $\sin 3x = \cos x$ dans $\mathbb{R}$.

c) Donner les solutions dans $[0, 2\pi[$.

d) Vérifier $x = \frac{\pi}{8}$ et $x = \frac{\pi}{4}$.



Cercle trigonométrique à compléter

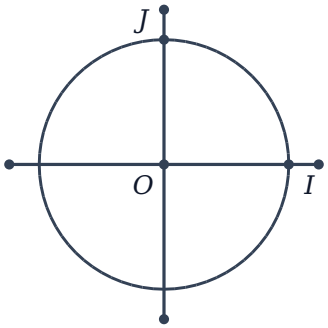
Exercice 3 – Équation du second degré en cos x

a) Exprimer $2\sin^2 x + 3\cos x - 3$ en fonction de $X = \cos x$.

b) Résoudre l'équation $2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0$.

c) Résoudre l'inéquation $2\sin^2 x + 3\cos x - 3 > 0$ sur $]-\pi, \pi]$.

d) Représenter les solutions sur le cercle.



Cercle trigonométrique à compléter

Exercice 4 – Une équation en tangente piégée

On considère l'équation $\tan 2x = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

a) Déterminer le domaine de définition de l'équation.

b) Résoudre « formellement » $2x = x + \frac{\pi}{4} + k\pi$.

c) Montrer que toutes les valeurs trouvées sont hors du domaine ; conclure.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Résoudre de même $\tan 2x = \tan x$.

Exercice 5 – Inéquations lues sur le cercle

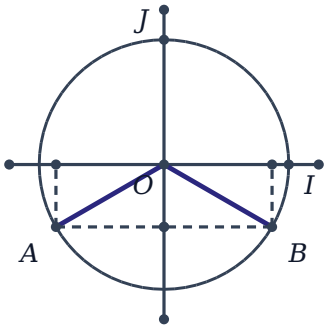
Résoudre dans $[0, 2\pi[$:

a) $\sin x \leq -\frac{1}{2}$.

b) $2\cos^2 x - \cos x - 1 > 0$.

c) $|\sin x| < \cos x$ (on travaillera sur $]-\pi, \pi]$).

d) Représenter l'arc solution de a) sur le cercle.



Les points A et B d'ordonnée −1/2

Exercice 6 – Forme réduite et équation

a) Écrire $\sqrt{3}\cos x - \sin x$ sous la forme $A\cos(x + \varphi)$.

b) Résoudre $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$ dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0, 2\pi[$.

c) Pour quelles valeurs de m l'équation $\sqrt{3}\cos x - \sin x = m$ a-t-elle des solutions ?

d) Déterminer le maximum de $\sqrt{3}\cos x - \sin x$ et où il est atteint.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Nombre de solutions selon un paramètre

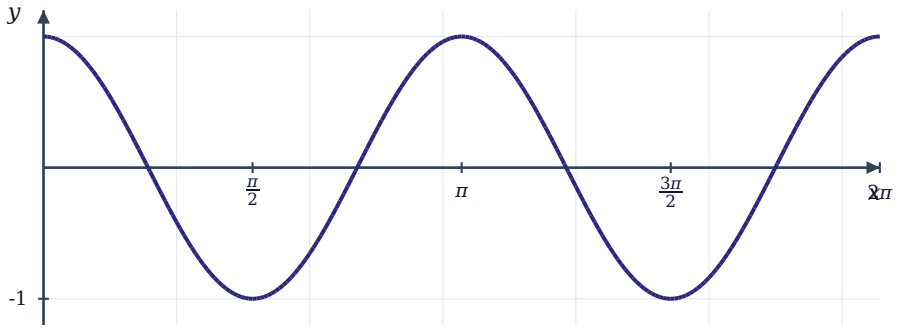
Soit $m \in \mathbb{R}$ et l'équation (E_m) : $\cos 2x = m$ d'inconnue $x \in [0, 2\pi[$.

a) Quand x parcourt $[0, 2\pi[$, que parcourt $2x$?

b) Discuter, selon m, le nombre de solutions de (E_m).

c) Résoudre $(E_{1/2})$.

d) Lire le résultat sur la courbe de $x \mapsto \cos 2x$.



La courbe de x ↦ cos 2x sur [0, 2π]

Exercice 8 – Somme de trois cosinus

a) Transformer $\cos x + \cos 3x$ en produit.

b) En déduire une factorisation de $\cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

c) Résoudre $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$ dans $[0, 2\pi[$.

d) Faire de même pour $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Un système trigonométrique

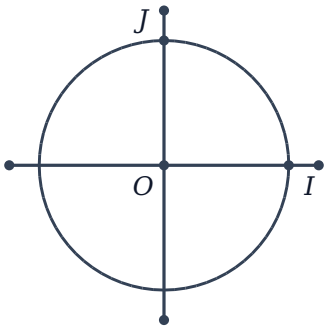
Résoudre le système $\cos x + \cos y = 1$, $x + y = \frac{2\pi}{3}$.

a) Transformer $\cos x + \cos y$ en produit.

b) En déduire $\cos \frac{x-y}{2}$.

c) Conclure.

d) Le système $\cos x + \cos y = \frac{3}{2}$, $x + y = \frac{2\pi}{3}$ a-t-il des solutions ?



Cercle trigonométrique à compléter

Exercice 10 – Substitution t = tan(x/2)

On résout $2\sin x + \cos x = 1$.

a) Vérifier si $x = \pi$ est solution.

b) Pour $x \neq \pi + 2k\pi$, poser $t = \tan \frac{x}{2}$ et obtenir une équation en t.

c) Conclure et donner les solutions à l'aide de arctan.

d) Retrouver le résultat par la forme réduite $\sqrt{5}\cos(x - \varphi)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

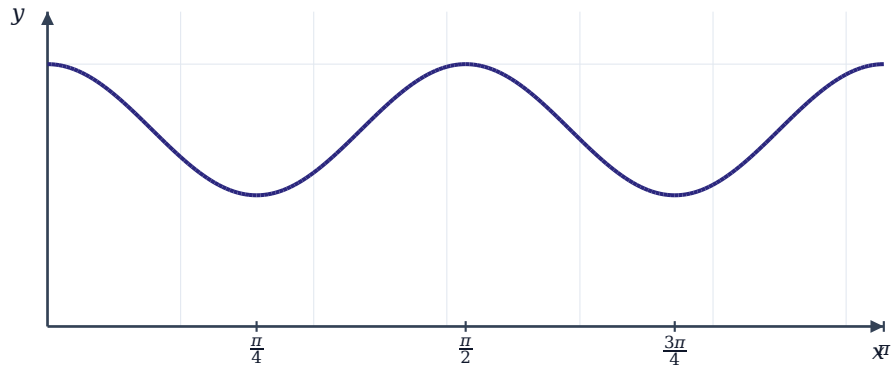
Exercice 11 – Puissances quatrièmes

a) Montrer que $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$.

b) Résoudre $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$.

c) Déterminer les valeurs extrêmes de $\sin^4 x + \cos^4 x$.

d) Exprimer $\sin^4 x + \cos^4 x$ en fonction de $\cos 4x$.



La courbe de $x \mapsto \sin^4 x + \cos^4 x$ sur $[0, \pi]$

Exercice 12 – Équation avec angle double et tangente

a) Montrer que $\cos 2x = \dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$ et $\sin 2x = \dfrac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$ pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

b) Résoudre $\cos 2x + \sin 2x = 1$ en posant $u = \tan x$.

c) Vérifier que les solutions exclues par la substitution ne sont pas solutions.

d) Retrouver le résultat par la forme réduite.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 13 – Arcs et cordes

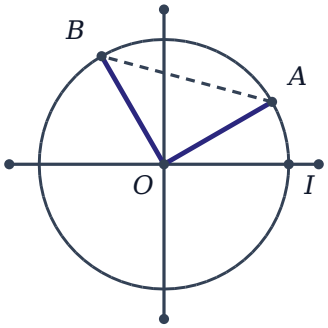
Sur le cercle unité, soit A le point d'angle a et B celui d'angle b.

a) Montrer que $AB^2 = 2 - 2\cos(b-a)$, puis $AB = 2\left|\sin\frac{b-a}{2}\right|$.

b) En déduire la longueur du côté d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité.

c) Calculer le périmètre p_n de ce polygone et sa limite quand $n \to +\infty$.

d) Calculer p_6 et p_{12} (on donne $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$).



La corde [AB] entre les points d'angles a et b

Exercice 14 – Inéquation avec deux fonctions

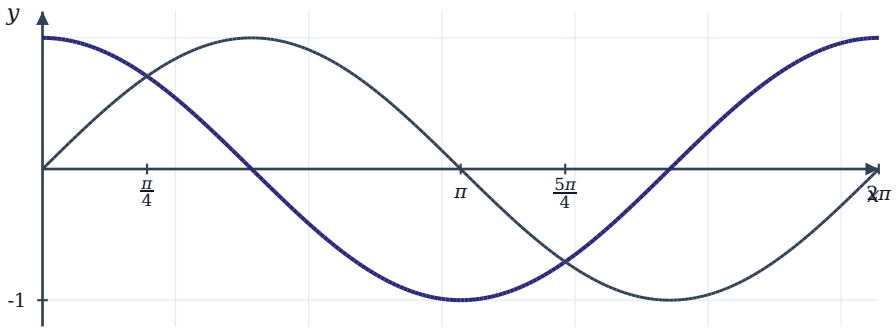
Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'inéquation $\cos x > \sin x$.

a) Se ramener à une inéquation de la forme $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$.

b) Résoudre.

c) Interpréter sur le cercle (droite $y = x$).

d) En déduire les solutions de $|\cos x| > |\sin x|$.



Les courbes de cos (trait épais) et sin sur [0, 2π]

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : combien de solutions pour sin x = x/10 ?

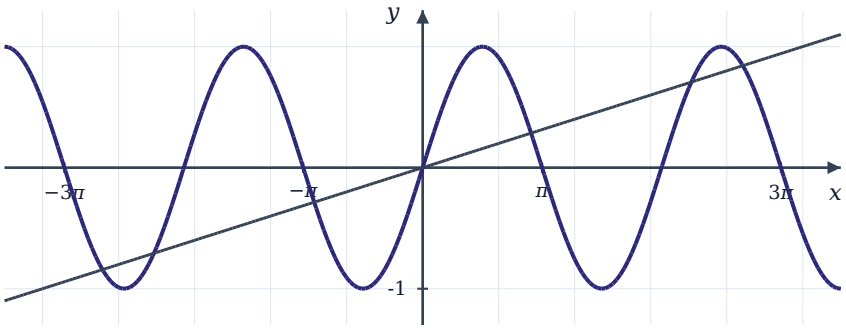
On étudie l'équation $\sin x = \frac{x}{10}$ sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que toute solution vérifie $|x| \leq 10$, et que les solutions sont symétriques par rapport à 0.

b) Sur $[0, 10]$, découper en intervalles $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ où sin ≥ 0 et étudier les intersections avec la droite $y = \frac{x}{10}$.

c) En déduire le nombre total de solutions.

d) Numériquement, les solutions positives sont 0, ≈ 2,85, ≈ 7,07, ≈ 8,42. Vérifier la cohérence.



La courbe du sinus et la droite y = x/10

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).