Plaquette 4 – Fonctions trigonométriques : études, limites et inégalités

Trigonométrie — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Pour étudier une fonction trigonométrique, on réduit d'abord le domaine grâce à la **périodicité** et à la **parité**, on dérive en factorisant la dérivée à l'aide des formules (duplication, $a\cos x + b\sin x$), on dresse le tableau de variations, puis on trace. Les inégalités usuelles ($\sin x \leq x$, $\frac{2x}{\pi} \leq \sin x$, $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$) s'obtiennent par étude de fonctions ou par concavité, et donnent les limites de référence.

Exercice 1 – Étude de sin x + ½ sin 2x

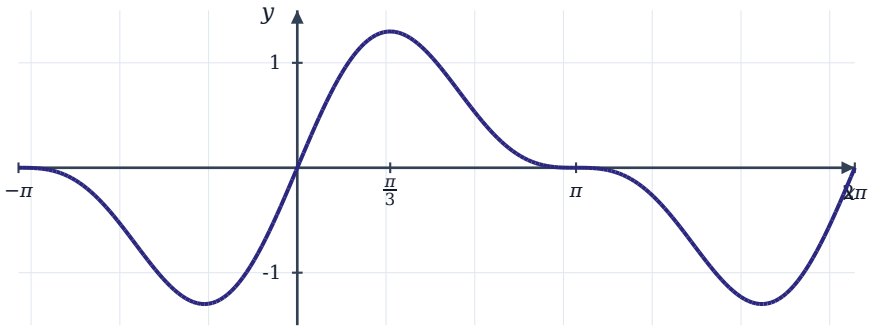
Soit $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$.

a) Montrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0, \pi]$.

b) Montrer que $f'(x) = (2\cos x - 1)(\cos x + 1)$.

c) Dresser le tableau de variations sur $[0, \pi]$ et donner le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

d) Vérifier le résultat sur la courbe.



La courbe de f

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

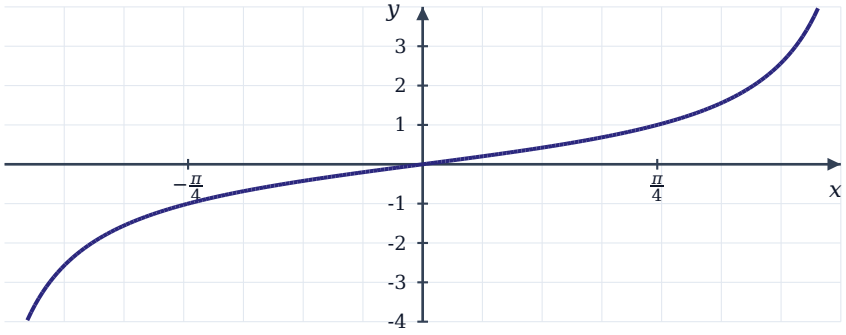
Exercice 2 – La fonction tangente

a) Donner le domaine de tan, sa période et sa parité.

b) Montrer que $\tan' = 1 + \tan^2$ et dresser le tableau de variations sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

c) Donner les limites aux bornes et l'équation de la tangente en 0.

d) Montrer que $\tan x \geq x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.



La courbe de tan sur]−π/2, π/2[

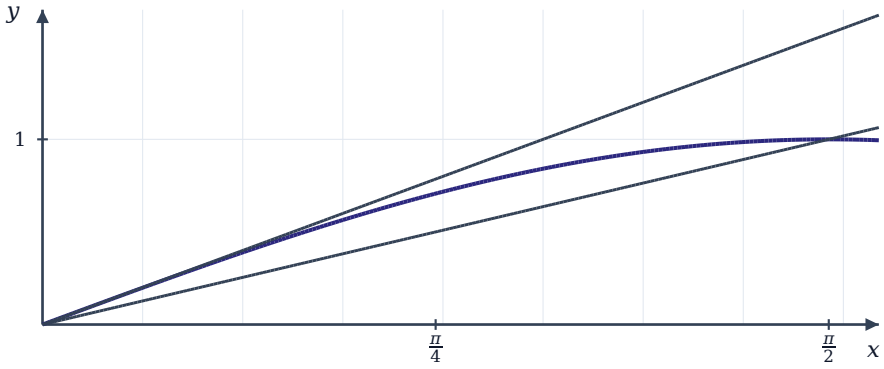
Exercice 3 – Inégalité de Jordan

a) Montrer que sin est concave sur $[0, \pi]$.

b) En déduire que la courbe est au-dessus de la corde joignant $(0,0)$ et $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$: $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

c) En déduire l'encadrement $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$.

d) Application : montrer que $\int_0^{\pi/2} e^{-\sin x}\,dx \leq \int_0^{\pi/2} e^{-2x/\pi}\,dx = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-1})$.



sin (trait épais) entre la corde y = 2x/π et la tangente y = x

Exercice 4 – Le sinus est 1-lipschitzien

a) Montrer que $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$.

b) En déduire $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.

c) Montrer de même $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$.

d) Application : si $u_n \to \ell$, montrer que $\sin u_n \to \sin \ell$ (continuité), avec une majoration explicite de l'erreur.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Étude de cos x + cos 2x

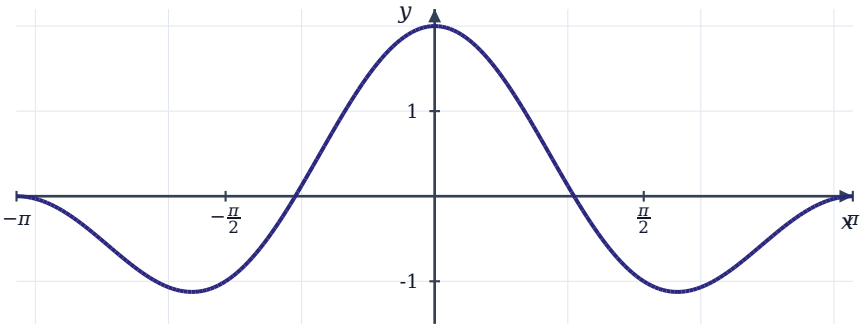
Soit $g(x) = \cos x + \cos 2x$.

a) Réduire l'intervalle d'étude.

b) Montrer que $g'(x) = -\sin x\,(1 + 4\cos x)$.

c) Dresser le tableau de variations sur $[0, \pi]$; on note $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ tel que $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$.

d) Calculer le minimum de g et le comparer à la courbe.



La courbe de g sur [−π, π]

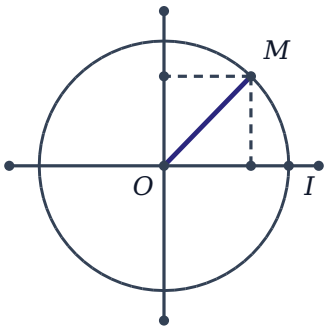
Exercice 6 – Limites de référence

a) Pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, comparer les aires du triangle OIM, du secteur angulaire et du triangle OIT (M point du cercle d'angle x, T sur la tangente en I) pour obtenir $\sin x \le x \le \tan x$.

b) En déduire $\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$, puis $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

c) En déduire $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ (utiliser $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$).

d) Calculer $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$.



Le point M d'angle x et le point I

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

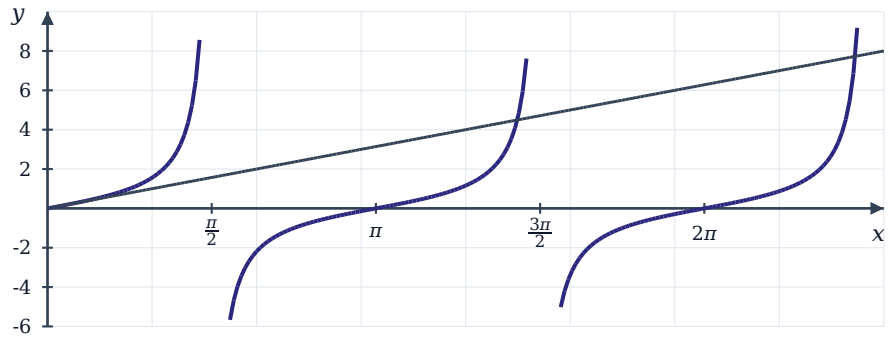
Exercice 7 – Les solutions de tan x = x

a) Montrer que l'équation $\tan x = x$ a exactement une solution x_k dans chaque intervalle $I_k = \left]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$.

b) Préciser x_0 et montrer que $x_k \in \left]k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ pour $k \geq 1$.

c) La résolution numérique donne $x_1 \approx 4{,}4934$. Comparer à $\frac{3\pi}{2}$.

d) Montrer que $x_k - \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \to 0$ quand $k \to +\infty$.



Les courbes de tan et de la droite y = x

Exercice 8 – Encadrements polynomiaux du sinus

a) Montrer que pour $x \geq 0$: $\sin x \leq x$, puis $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ (intégrer la précédente).

b) En intégrant à nouveau, montrer que $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$ pour $x \geq 0$.

c) En déduire $0 \leq x - \sin x \leq \frac{x^3}{6}$ et vérifier pour $x = 0{,}5$.

d) Estimer l'erreur commise en remplaçant $\sin(0{,}1)$ par $0{,}1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Lire un signal sinusoïdal

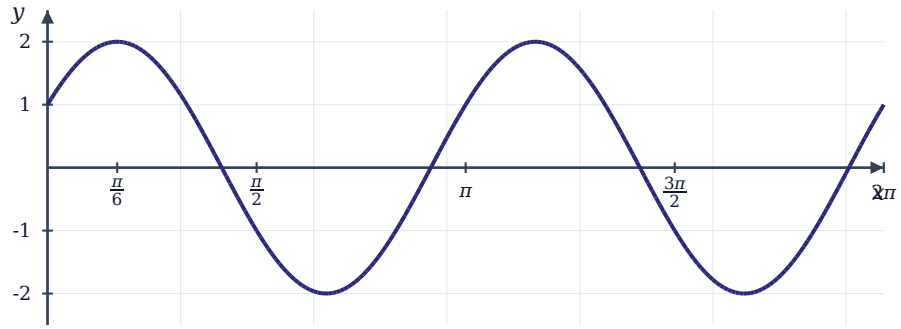
On observe le signal $s(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ ci-dessous ($A > 0$, $\omega > 0$, $\varphi \in]-\pi, \pi]$).

a) Lire l'amplitude et la période ; en déduire A et ω.

b) Lire $s(0)$ et le sens de variation en 0 ; en déduire φ.

c) Écrire $s(t)$ sous la forme $a\cos\omega t + b\sin\omega t$.

d) Déterminer les instants de $[0, 2\pi]$ où $s(t) = 1$.



Le signal s(t)

Exercice 10 – Aire des polygones réguliers inscrits

Soit A_n l'aire du polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité.

a) Montrer que $A_n = \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$ (découper en n triangles isocèles de sommet O).

b) Calculer A_4, A_6, A_{12}.

c) Montrer que $A_n \to \pi$.

d) Montrer que (A_n) est croissante en étudiant $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ sur $]0, \pi]$.

Exercice 11 – Étude de x − sin x et applications

Soit $h(x) = x - \sin x$.

a) Étudier les variations de h sur $\mathbb{R}$; est-elle bijective ?

b) En déduire que l'équation $x - \sin x = a$ a une unique solution pour tout réel a.

c) Donner un encadrement de la solution pour $a = 1$ (utiliser $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$).

d) Interpréter : l'équation de Kepler $E - e\sin E = M$ avec $e = 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 12 – Étude d’une fraction trigonométrique

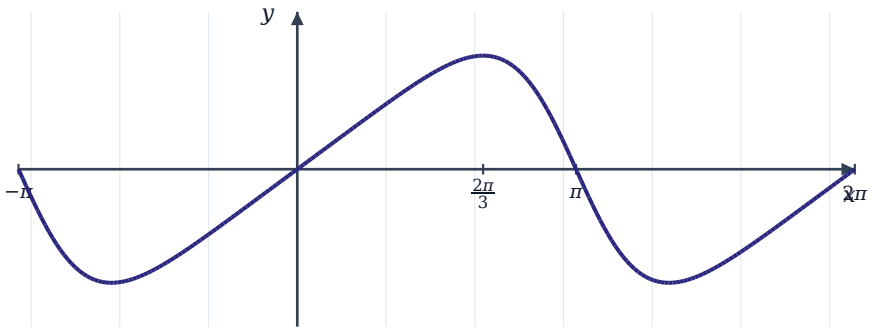
Soit $f(x) = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$.

a) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, impaire.

b) Montrer que $f'(x) = \dfrac{2\cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$.

c) Dresser le tableau de variations sur $[0, \pi]$ et donner les extremums.

d) En déduire que $|\sin x| \leq \dfrac{\sqrt{3}}{3}(2 + \cos x)$ pour tout x.



La courbe de f

Exercice 13 – Continuité et limite à l’infini

a) Montrer que sin n’a pas de limite en $+\infty$ (considérer $x_n = n\pi$ et $y_n = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$).

b) Montrer que $\dfrac{\sin x}{x} \to 0$ en $+\infty$.

c) Étudier la limite en 0 et en $+\infty$ de $x \sin \dfrac{1}{x}$.

d) La fonction $x \mapsto \sin \dfrac{1}{x}$ a-t-elle une limite en 0 ?

Exercice 14 – Maximum d’une somme de sinus d’angles d’un triangle

Soient $a, b, c > 0$ avec $a + b + c = \pi$.

a) Montrer que $\sin a + \sin b = 2 \sin \dfrac{a+b}{2} \cos \dfrac{a-b}{2} \leq 2 \sin \dfrac{a+b}{2}$.

b) Montrer de même que $\sin c + \sin \dfrac{\pi}{3} \leq 2 \sin \dfrac{c + \pi/3}{2}$.

c) En sommant, montrer que $\sin a + \sin b + \sin c + \sin \dfrac{\pi}{3} \leq 4 \sin \dfrac{\pi}{3}$ (appliquer encore a)).

d) En déduire $\sin a + \sin b + \sin c \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$; cas d’égalité ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : étude complète de sin x + cos 2x

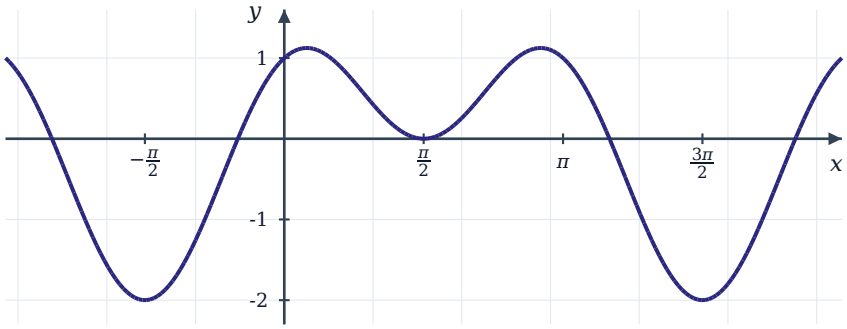
Soit $f(x) = \sin x + \cos 2x$.

a) Montrer que f est 2π-périodique et que $f(\pi - x) = f(x)$; en déduire un intervalle d'étude.

b) Calculer f' et la factoriser.

c) Dresser le tableau de variations sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et donner le maximum et le minimum de f.

d) Résoudre $f(x) = 1$.



La courbe de f

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).