Plaquette 1 – Formules d’addition, équations et linéarisation

Trigonométrie — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

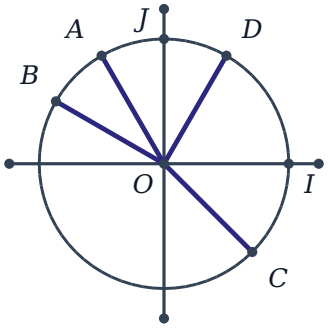
Exercices

Méthode

On exploite le cercle trigonométrique et les formules d’addition, de duplication et de factorisation ; on résout les équations $\cos x = a$ et $\sin x = a$ **sur** $\mathbb{R}$; on linéarise avec Euler et l’on met sous la forme $A\cos(x-\varphi)$.

Exercice 1 – Valeurs remarquables

Donner les valeurs exactes de $\cos\frac{2\pi}{3}$, $\sin\frac{5\pi}{6}$, $\cos\frac{7\pi}{4}$ et $\tan\frac{\pi}{3}$.



Points associés à 2π/3 (A), 5π/6 (B), 7π/4 (C) et π/3 (D)

Exercice 2 – Formule d’addition

Calculer la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$.

Exercice 3 – Duplication

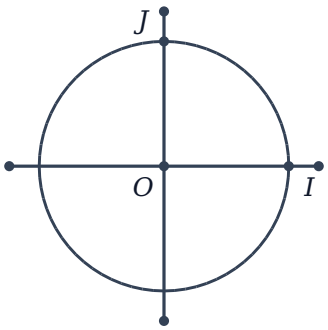
Soit x tel que $\cos x = \frac{3}{5}$ et $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

Calculer $\sin x$, $\cos 2x$ et $\sin 2x$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Équation en cosinus

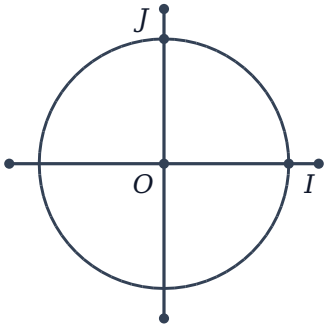
Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\cos x = \frac{1}{2}$, puis donner les solutions dans $[0\,;2\pi]$.



Cercle trigonométrique à compléter

Exercice 5 – Équation en sinus

Résoudre dans $[0\,;2\pi]$: $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Cercle trigonométrique à compléter

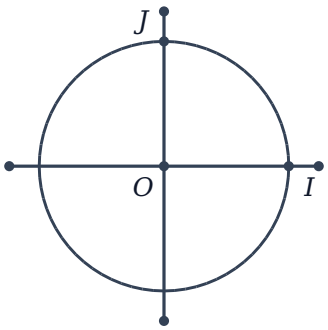
Exercice 6 – Équation avec transformation

Résoudre dans $[0\,;2\pi]$: $2\cos^2 x - 1 = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Inéquation trigonométrique

Résoudre dans $[0\,;2\pi]$: $\cos x \geq \dfrac{1}{2}$.



Cercle trigonométrique : repérer l'arc cherché

Exercice 8 – Linéarisation

Linéariser $\cos^3 x$ à l'aide des formules d'Euler.

Exercice 9 – Forme A cos(x − φ)

Écrire $\cos x + \sqrt{3}\sin x$ sous la forme $A\cos(x-\varphi)$ avec $A > 0$.

Exercice 10 – Résoudre avec la forme réduite

Résoudre dans $[0\,;2\pi]$: $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$.

Exercice 11 – Somme en produit

Transformer la somme $\cos 3x + \cos x$ en produit, puis en déduire les solutions de $\cos 3x + \cos x = 0$ dans $[0\,;2\pi]$.

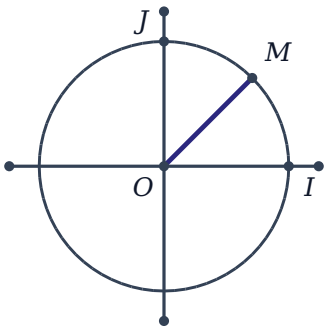
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 12 – Tangente

a) Donner l'ensemble de définition de tan.

b) Résoudre $\tan x = 1$ dans $\mathbb{R}$.

c) Démontrer que $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.



Le point M associé à π/4

Exercice 13 – Le cosinus de π/5

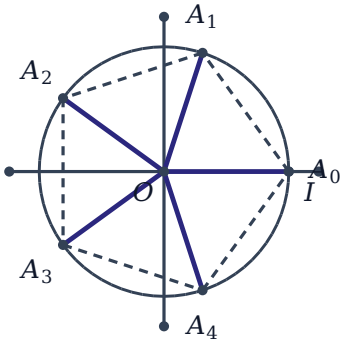
Soit $\theta = \frac{\pi}{5}$ et $c = \cos\theta$.

a) Justifier que $\cos 3\theta = -\cos 2\theta$ (utiliser $3\theta = \pi - 2\theta$).

b) En utilisant $\cos 3\theta = 4c^3 - 3c$ et $\cos 2\theta = 2c^2 - 1$, montrer que $(c+1)(4c^2 - 2c - 1) = 0$.

c) En déduire $\cos\frac{\pi}{5} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

d) Calculer $\cos\frac{2\pi}{5}$ et vérifier numériquement.



Le pentagone régulier inscrit (sommets d'angles 2kπ/5)

Exercice 14 – Condition de résolubilité de a cos x + b sin x = c

Soient a, b réels non tous deux nuls et c réel.

a) Montrer que $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$ pour un φ à préciser.

b) En déduire que l'équation $a\cos x + b\sin x = c$ a des solutions si et seulement si

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$c^2 \leq a^2 + b^2$.

c) Pour quelles valeurs de m l'équation $3\cos x + 4\sin x = m$ a-t-elle des solutions ?

d) Résoudre $3\cos x + 4\sin x = 5$ (donner x à l'aide de arctan).

Exercice 15 – Synthèse : étude complète

Soit $f(x) = \sin x + \cos x$.

a) Écrire $f(x)$ sous la forme $A\cos(x - \varphi)$.

b) En déduire le maximum et le minimum de f, et les valeurs de x correspondantes dans $[0\,;2\pi]$.

c) Résoudre $f(x) = 0$ sur $[0\,;2\pi]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).