Plaquette 3 – Formules de trigonométrie : démonstrations et transformations

Trigonométrie — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Toutes les formules découlent des formules d'addition, elles-mêmes démontrées par le produit scalaire (ou les nombres complexes). On apprend à les **redémontrer** rapidement, à **linéariser** (puissances → sommes, par Euler), à **factoriser** (sommes → produits), et à exploiter les formules pour calculer des valeurs exactes ($\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{10}$) ou prouver des identités conditionnelles. On contrôle chaque identité par une valeur numérique.

Exercice 1 – Démontrer la formule d'addition

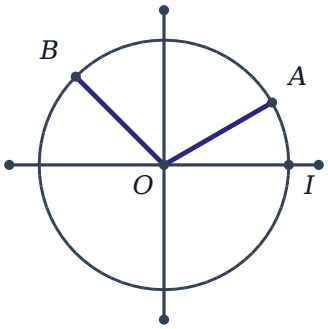
Soient A et B les points du cercle unité d'angles a et b.

a) Calculer $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ de deux façons (coordonnées, puis normes et angle).

b) En déduire $\cos(b-a) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

c) En déduire $\cos(a+b)$, puis $\sin(a+b)$ (utiliser $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$).

d) Calculer $\cos\frac{7\pi}{12}$ à l'aide de $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$.



Les points A (angle a) et B (angle b) du cercle unité

Exercice 2 – Tangentes de π/12 et 5π/12

a) Démontrer la formule $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ (conditions à préciser).

b) Calculer $\tan\frac{\pi}{12}$ en écrivant $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$.

c) Calculer $\tan\frac{5\pi}{12}$ et vérifier que $\tan\frac{\pi}{12}\tan\frac{5\pi}{12} = 1$; expliquer.

d) Montrer que $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 3 – Formules de l’arc moitié

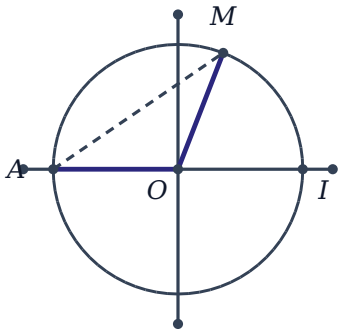
Soit $x \neq \pi + 2k\pi$ et $t = \tan\frac{x}{2}$.

a) Démontrer $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ et $\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$.

b) En déduire $\tan\frac{\pi}{8}$ (utiliser $\tan\frac{\pi}{4} = 1$).

c) Interpréter géométriquement : le point $M(\cos x, \sin x)$, le point $A(-1, 0)$, et la pente de (AM).

d) Calculer $\cos x$ et $\sin x$ pour $t = \frac{1}{3}$ et vérifier $\cos^2 + \sin^2 = 1$.



Le point $A(-1, 0)$ et un point M du cercle

Exercice 4 – Linéariser par les formules d’Euler

a) Linéariser $\cos^4 x$ à l’aide de $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$.

b) Linéariser $\sin^3 x$.

c) En déduire une primitive de $\cos^4 x$ et la valeur de $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \, dx$.

d) Contrôler a) et b) en $x = 0{,}3$.

Exercice 5 – Produits de cosinus remarquables

a) À l’aide de $2\sin a \cos a = \sin 2a$, calculer $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$ (multiplier par $\sin\frac{\pi}{5}$).

b) Calculer de même $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$.

c) Généraliser : $\prod_{k=0}^{n-1} \cos(2^k x) = \frac{\sin(2^n x)}{2^n \sin x}$.

d) Vérifier numériquement b).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 6 – Identité conditionnelle dans un triangle

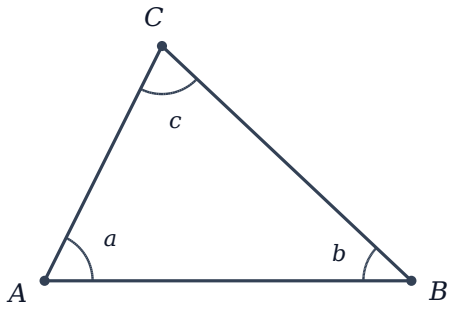
Soient a, b, c trois angles d'un triangle ($a + b + c = \pi$), aucun n'étant droit.

a) Montrer que $\tan(a + b) = -\tan c$.

b) En déduire que $\tan a + \tan b + \tan c = \tan a \tan b \tan c$.

c) Vérifier pour le triangle équilatéral et pour $a = \frac{\pi}{4}$, $b = \frac{\pi}{3}$.

d) Montrer que dans un triangle acutangle, $\tan a \tan b \tan c \geq 3\sqrt{3}$ (utiliser l'inégalité arithmético-géométrique).



Un triangle d'angles a, b, c

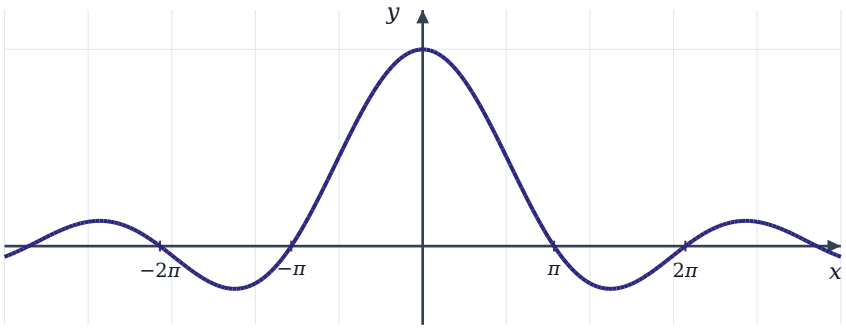
Exercice 7 – Le produit de Viète

a) Montrer par récurrence que $\sin x = 2^n \sin\frac{x}{2^n} \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k}$.

b) En déduire $\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$.

c) Appliquer à $x = \frac{\pi}{2}$ et en déduire la formule de Viète : $\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdots$

d) Vérifier a) numériquement pour $x = 2$, $n = 5$.



La fonction x ↦ sin x / x, limite du produit

Exercice 8 – Sinus de π/10

a) Montrer que $\theta = \frac{\pi}{10}$ vérifie $\sin 2\theta = \cos 3\theta$.

b) En déduire, avec $s = \sin\theta$, que $4s^2 + 2s - 1 = 0$ (diviser par $\cos\theta$).

c) En déduire $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\cos\frac{\pi}{5}$.

d) Vérifier numériquement et relier au nombre d'or.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Inégalité |sin nx| ≤ n |sin x|

a) Montrer que $|\sin(a+b)| \leq |\sin a| + |\sin b|$.

b) En déduire par récurrence que $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$ pour $n \in \mathbb{N}$.

c) Montrer que l'inégalité est optimale en un sens : $\frac{\sin(nx)}{\sin x} \to n$ quand $x \to 0$.

d) Montrer que $|\sin(nx)| \leq n|x|$, et comparer.

Exercice 10 – Dérivées successives

a) Montrer que $\cos' x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin' x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

b) En déduire par récurrence $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ et $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

c) Calculer la dérivée n-ième de $x \mapsto \cos(ax+b)$.

d) Calculer la dérivée n-ième de $\cos^2 x$ (linéariser d'abord).

Exercice 11 – Le courant triphasé

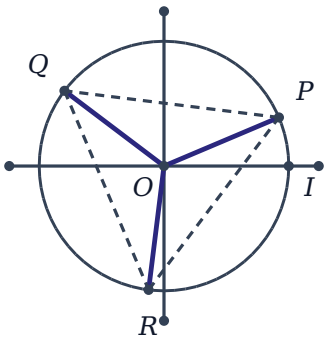
Soit $f(x) = \cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$.

a) Montrer que $f(x) = 0$ pour tout x (développer, ou utiliser les racines cubiques de l'unité).

b) Interpréter sur le cercle : les trois points d'angles x, $x + \frac{2\pi}{3}$, $x + \frac{4\pi}{3}$.

c) Calculer $g(x) = \cos^2 x + \cos^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos^2\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$.

d) Interpréter c) : la puissance totale d'un système triphasé équilibré est constante.



Trois points à 2π/3 l'un de l'autre

Exercice 12 – Somme des sinus des angles d'un triangle

Soient a, b, c les angles d'un triangle.

a) Montrer que $\sin a + \sin b = 2\cos\frac{c}{2}\cos\frac{a-b}{2}$.

b) Montrer que $\sin c = 2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}$ et $\sin\frac{c}{2} = \cos\frac{a+b}{2}$.

c) En déduire $\sin a + \sin b + \sin c = 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$.

d) Vérifier pour le triangle équilatéral et pour le triangle rectangle isocèle.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 13 – Polynômes de Tchebychev

a) Montrer que $\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) = 2\cos x \cos(nx)$.

b) En déduire qu'il existe des polynômes T_n tels que $\cos(nx) = T_n(\cos x)$, avec $T_0 = 1$, $T_1 = X$, $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$.

c) Calculer T_2, T_3, T_4, T_5.

d) Vérifier T_5 en $x = 0{,}3$ et donner le coefficient dominant de T_n.

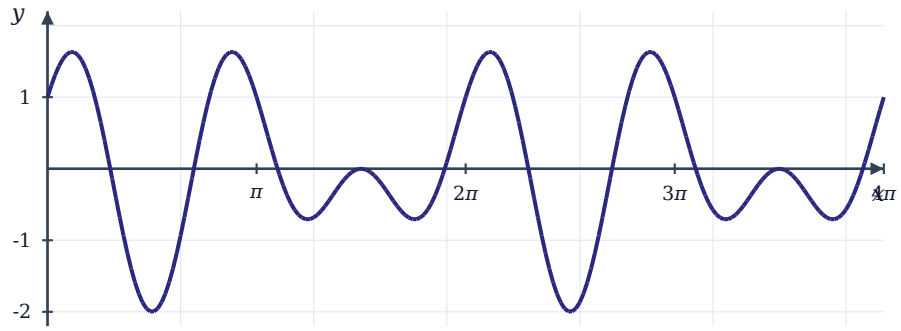
Exercice 14 – Périodicité

a) Montrer que $f(x) = \sin 3x + \cos 2x$ est 2π-périodique ; est-ce la plus petite période ?

b) Déterminer la plus petite période de $g(x) = \cos\frac{2x}{3} + \sin\frac{x}{2}$.

c) Montrer que $h(x) = \sin x + \sin(\sqrt{2}\,x)$ n'est pas périodique (si T est une période, dériver deux fois et comparer en 0).

d) Lire la période de f sur sa courbe.



La courbe de $x \mapsto \sin 3x + \cos 2x$

Exercice 15 – Synthèse : cos(2π/7) et une équation du troisième degré

Soit $c_k = \cos\frac{2k\pi}{7}$ pour $k = 1, 2, 3$.

a) Montrer que $c_1 + c_2 + c_3 = -\frac{1}{2}$ (somme des parties réelles des racines 7-ièmes de l'unité).

b) Montrer que $c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1 = -\frac{1}{2}$ (produits en sommes).

c) Montrer que $c_1c_2c_3 = \frac{1}{8}$ (exercice 5).

d) En déduire que c_1, c_2, c_3 sont les racines de $8X^3 + 4X^2 - 4X - 1$, et vérifier numériquement pour c_1.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).