Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : trigonométrie et géométrie

Trigonométrie — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

La trigonométrie sert d'abord à **mesurer** : longueurs et angles d'un triangle (loi des sinus, Al-Kashi, Héron), angles de vue, signaux périodiques. On modélise la situation par un angle bien choisi, on exprime la grandeur à étudier comme une fonction de cet angle, puis on la **calcule** ou on l'**optimise** avec les outils des plaquettes précédentes (formules, dérivation, inégalités). Chaque résultat est contrôlé sur un cas particulier (triangle équilatéral, rectangle).

Exercice 1 – Loi des sinus et cercle circonscrit

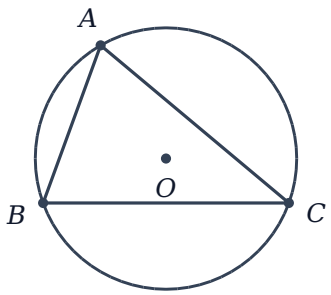
Soit un triangle ABC inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R.

a) Soit A' le point diamétralement opposé à B. Montrer que $B\hat{A'}C = B\hat{A}C$ (angles inscrits) et que le triangle $BA'C$ est rectangle en C.

b) En déduire $a = BC = 2R\sin A$, puis la loi des sinus.

c) Application : un triangle a $A = \frac{\pi}{3}$, $B = \frac{\pi}{4}$ et $a = 6$. Calculer R, b, c.

d) Calculer l'aire de ce triangle.



Un triangle ABC et son cercle circonscrit

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 2 – Al-Kashi et Héron

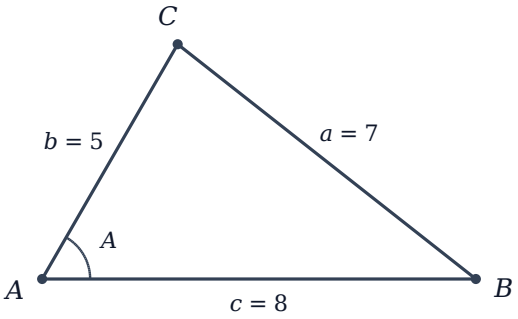
Soit un triangle de côtés $a = 7$, $b = 5$, $c = 8$.

a) Démontrer la formule d'Al-Kashi $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ à l'aide de $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

b) Calculer l'angle A.

c) Calculer l'aire de deux façons : $\frac{1}{2}bc\sin A$, puis la formule de Héron.

d) Calculer le rayon du cercle circonscrit et celui du cercle inscrit ($r = \frac{A}{s}$).



Le triangle de côtés 5, 7, 8

Exercice 3 – Le triangle inscrit d'aire maximale

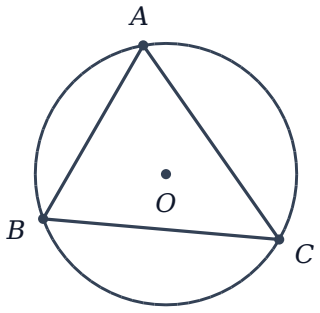
Soit un triangle ABC inscrit dans le cercle unité, d'angles A, B, C.

a) Montrer que son aire vaut $A = 2\sin A\sin B\sin C$ (loi des sinus avec $R = 1$).

b) Montrer que $\sin A\sin B \le \sin^2\frac{A+B}{2}$ (utiliser $\sin A\sin B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$).

c) En déduire que l'aire est maximale pour le triangle équilatéral, et donner la valeur maximale.

d) Comparer à l'aire du disque.



Un triangle inscrit dans le cercle unité

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Oscillateur harmonique

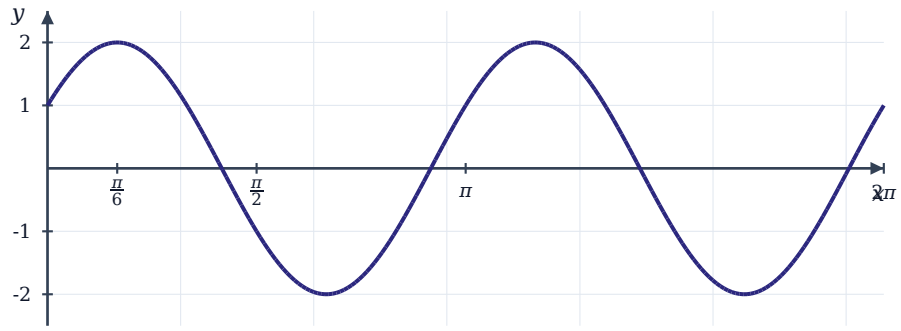
Un ressort vérifie $x'' + \omega^2 x = 0$ avec $\omega = 2$, $x(0) = 1$ et $x'(0) = 2\sqrt{3}$.

a) Vérifier que $x(t) = A\cos(2t) + B\sin(2t)$ est solution pour tous A, B, et déterminer A, B.

b) Écrire $x(t) = X\cos(2t - \varphi)$; donner l'amplitude X et la phase φ.

c) Déterminer le premier instant $t > 0$ où l'élongation est maximale.

d) Vérifier sur la courbe (période, amplitude).



L'élongation x(t)

Exercice 5 – Battements

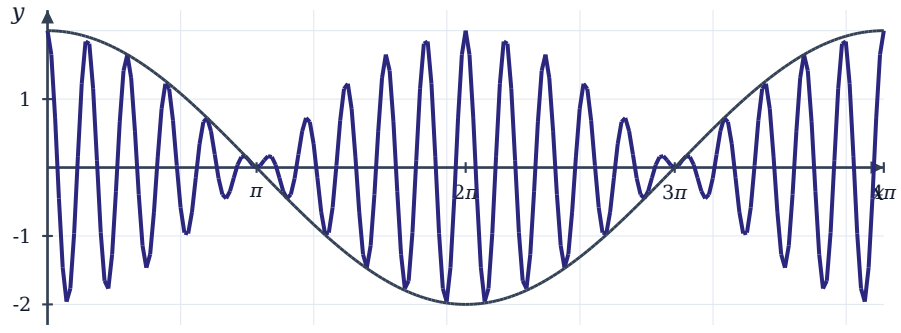
On superpose deux sons de pulsations voisines : $s(t) = \cos(10t) + \cos(11t)$.

a) Écrire $s(t)$ comme un produit.

b) Identifier la « porteuse » (oscillation rapide) et l'« enveloppe » (variation lente de l'amplitude).

c) Quelle est la période de l'enveloppe $|2\cos(0{,}5t)|$? C'est la période des battements.

d) Deux diapasons de 440 Hz et 442 Hz : combien de battements par seconde entend-on ?



Le signal s(t) (épais) et l'enveloppe 2 cos(t/2)

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 6 – Passer une échelle dans un couloir

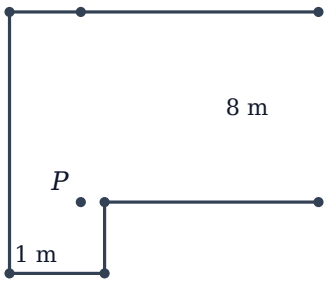
Un couloir de largeur 1 m débouche à angle droit dans un couloir de largeur 8 m. On veut faire passer horizontalement une échelle la plus longue possible.

a) Une échelle qui touche le coin intérieur et les deux murs extérieurs, faisant l'angle $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ avec le premier mur, a pour longueur $L(\theta) = \frac{1}{\cos\theta} + \frac{8}{\sin\theta}$. Le justifier.

b) Calculer $L'(\theta)$ et montrer que le minimum est atteint pour $\tan\theta = 2$.

c) Calculer ce minimum.

d) Interpréter : quelle est la longueur maximale d'une échelle qui peut tourner ?



Les deux couloirs et le coin P

Exercice 7 – Le meilleur angle de vue

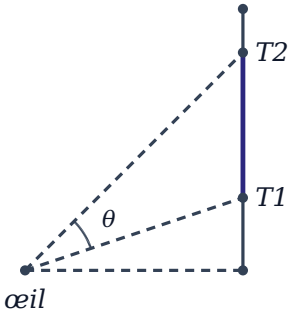
Un tableau est accroché entre les hauteurs 1 m et 3 m au-dessus des yeux d'un visiteur situé à la distance $x > 0$ du mur. On note $\theta(x)$ l'angle sous lequel il voit le tableau.

a) Montrer que $\theta(x) = \arctan\frac{3}{x} - \arctan\frac{1}{x}$ et que $\tan\theta(x) = \frac{2x}{x^2+3}$.

b) Montrer que $\tan\theta$ (donc θ) est maximal pour $x = \sqrt{3}$.

c) Calculer l'angle maximal.

d) Généraliser : tableau entre a et b ; distance optimale $\sqrt{ab}$.



Le tableau [T_1T_2] vu depuis l'œil

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Radicaux emboîtés

a) Montrer que $2\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{2+2\cos\theta}$ pour $\theta \in [0,\pi]$.

b) En déduire que $2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$ (n radicaux).

c) Vérifier pour $n=3$: $\cos\frac{\pi}{16} \approx 0{,}98079$.

d) En déduire que la suite $u_1 = \sqrt{2}$, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$ tend vers 2, et que $2-u_n \sim \frac{\pi^2}{4^{n+1}}$.

Exercice 9 – Le nombre de Dottie

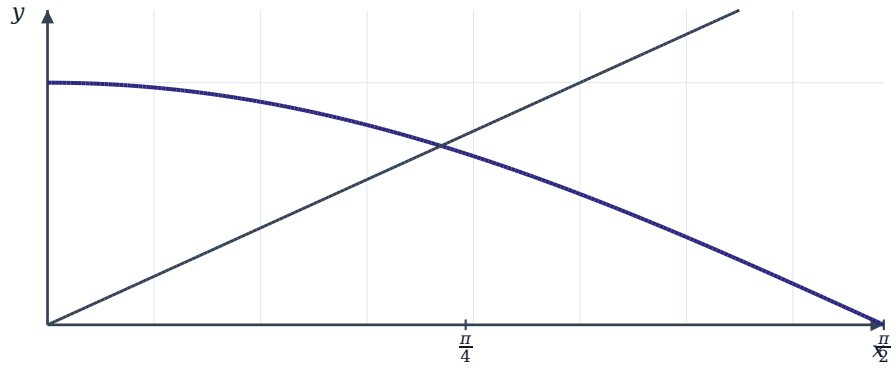
On étudie l'équation $\cos x = x$.

a) Montrer qu'elle a une unique solution réelle α, et que $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) Montrer que cos envoie $[0,1]$ dans $[\cos 1, 1] \subset [0,1]$ et y est contractante de rapport $\sin 1 < 1$.

c) En déduire que la suite $x_{n+1} = \cos x_n$ converge vers α pour tout $x_0 \in [0,1]$.

d) On donne $\alpha \approx 0{,}739085$: vérifier $\cos\alpha \approx \alpha$ et estimer le nombre d'itérations pour 10^{-6} depuis $x_0 = 1$.



Les courbes de cos et de y = x

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – La suite des sinus itérés

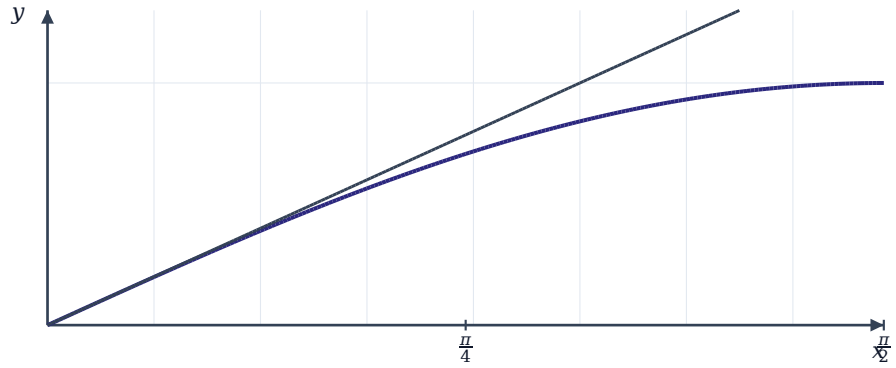
Soit $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $u_{n+1} = \sin u_n$.

a) Montrer que (u_n) est positive et décroissante.

b) En déduire qu'elle converge, et que sa limite ℓ vérifie $\sin \ell = \ell$; conclure $\ell = 0$.

c) Montrer que la convergence est lente : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$.

d) Numériquement, depuis $u_0 = 1$, on a $u_{100} \approx 0{,}169$; comparer à $\sqrt{\frac{3}{100}} \approx 0{,}173$.



La courbe de sin sous la droite $y = x$

Exercice 11 – Une identité dans le triangle

Soient A, B, C les angles d'un triangle.

a) Montrer que $\cos C = -\cos(A+B) = \sin A \sin B - \cos A \cos B$.

b) En déduire $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1$ (calculer $\cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C$).

c) Vérifier pour le triangle équilatéral et pour un triangle rectangle.

d) En déduire qu'un triangle est rectangle si et seulement si $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$.

Exercice 12 – La formule de Machin

On pose $\alpha = \arctan \frac{1}{5}$.

a) Calculer $\tan 2\alpha$ puis $\tan 4\alpha$.

b) Calculer $\tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

c) En déduire la formule de Machin $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$ (justifier que les angles sont dans le bon intervalle).

d) Expliquer pourquoi cette formule permet de calculer beaucoup de décimales de π.

Exercice 13 – Somme de carrés de cosinus décalés

Soit $n \geq 2$ et $S(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\left(x + \frac{k\pi}{n}\right)$.

a) Linéariser et montrer que $S(x) = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(2x + \frac{2k\pi}{n}\right)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Montrer que la dernière somme est nulle.

c) En déduire que $S(x) = \frac{n}{2}$ pour tout x.

d) Application : trois phases ($n = 3$) ; relier à l'exercice du courant triphasé.

Exercice 14 – Distance d'un point à une droite et angle

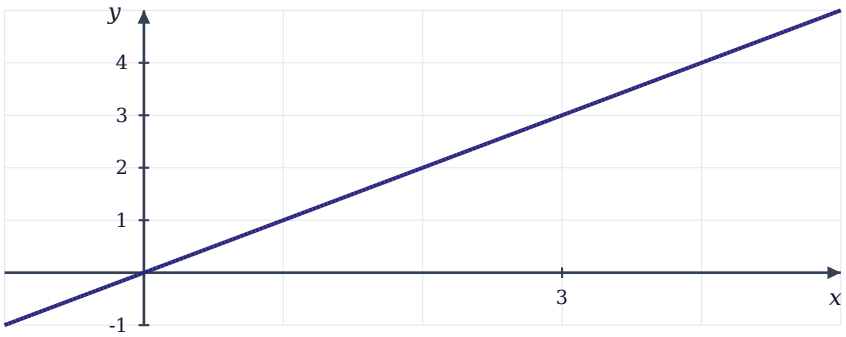
Dans le plan, soit D la droite passant par O de vecteur directeur $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, et M le point de coordonnées polaires (r, θ).

a) Montrer que la distance de M à D vaut $r|\sin(\theta - \alpha)|$.

b) Montrer que le projeté de M sur D est à la distance $r|\cos(\theta - \alpha)|$ de O.

c) Application : $M(3, 4)$ et $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

d) Retrouver c) avec la formule de la distance à une droite $\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.



La droite D (angle π/4) et le point M(3, 4)

Exercice 15 – Synthèse : angles d'un triangle en progression arithmétique

Les angles d'un triangle sont en progression arithmétique : $A = \frac{\pi}{3} - d$, $B = \frac{\pi}{3}$, $C = \frac{\pi}{3} + d$ avec $0 \le d < \frac{\pi}{3}$.

a) Justifier que $B = \frac{\pi}{3}$ nécessairement.

b) Exprimer $\sin A + \sin C$ et $\sin A \sin C$ en fonction de d.

c) Si de plus les côtés opposés vérifient $a + c = 2b$ (progression arithmétique des côtés), montrer que $d = 0$ (loi des sinus).

d) Si $b = \sqrt{3}$ et $a = 1$, calculer d, puis c.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).