Plaquette 3 – Couples de variables : lois conjointes, marginales et conditionnelles

Variables aléatoires finies — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Couples de variables aléatoires.

— **Marginales** : $\mathbb{P}(X=x)=\sum_y \mathbb{P}(X=x,Y=y)$, et de même pour Y.

— **Loi conditionnelle** de Y sachant $X=x$ (si $\mathbb{P}(X=x)>0$) :

$$\mathbb{P}(Y=y\mid X=x)=\frac{\mathbb{P}(X=x,Y=y)}{\mathbb{P}(X=x)}$$

— **Loi de** $g(X,Y)$: $\mathbb{P}(g(X,Y)=z)=\sum_{g(x,y)=z}\mathbb{P}(X=x,Y=y)$.

— **Indépendance** : $\mathbb{P}(X=x,Y=y)=\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)$ pour **tous** x,y.

— **Lemme des coalitions** : si X et Y sont indépendantes, $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi.

— Une loi conjointe de la forme $\mathbb{P}(X=x,Y=y)=a(x)b(y)$ correspond à des variables indépendantes.

Correction de l'exercice 1 – Lire un tableau de loi conjointe

a) On somme les lignes pour X, les colonnes pour Y :

$$\mathbb{P}(X=0)=0{,}3,\quad \mathbb{P}(X=1)=0{,}3,\quad \mathbb{P}(X=2)=0{,}4 \qquad \mathbb{P}(Y=0)=0{,}6,\quad \mathbb{P}(Y=1)=0{,}4$$

b) $\mathbb{P}(X=0,Y=0)=0{,}1\neq 0{,}3\times 0{,}6=0{,}18$: pas indépendantes.

c) On divise la colonne $Y=1$ par son total $0{,}4$: $\mathbb{P}(X=0\mid Y=1)=\frac{0{,}2}{0{,}4}=0{,}5$, $\mathbb{P}(X=1\mid Y=1)=0{,}25$, $\mathbb{P}(X=2\mid Y=1)=0{,}25$.

d) On regroupe les cases de même somme :

— $S=0$: $0{,}1$; $S=1$: $(1,0)$ et $(0,1)$, $0{,}2+0{,}2=0{,}4$; $S=2$: $(2,0)$ et $(1,1)$, $0{,}3+0{,}1=0{,}4$; $S=3$: $0{,}1$. Somme 1.

Réponse. X : $0{,}3;0{,}3;0{,}4$; Y : $0{,}6;0{,}4$; dépendantes ; $X\mid Y=1$: $0{,}5;0{,}25;0{,}25$; S : $0{,}1;0{,}4;0{,}4;0{,}1$.

Correction de l'exercice 2 – Deux tirages sans remise

a) Les 6 couples (x,y) avec $x\neq y$ sont équiprobables :

$$\mathbb{P}(X=x,Y=y)=\frac{1}{6}\ (x\neq y),\qquad \mathbb{P}(X=x,Y=x)=0$$

b) Chaque ligne et chaque colonne contient deux cases à $\frac{1}{6}$: X et Y sont toutes deux uniformes sur $\{1,2,3\}$ (le second jeton est, pris seul, aussi aléatoire que le premier).

c) Non : $\mathbb{P}(X=1,Y=1)=0\neq\frac{1}{9}$.

d) $|X-Y|=1$ pour $(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)$: $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$; $=2$ pour $(1,3),(3,1)$: $\frac{1}{3}$.

Réponse. Loi conjointe $\frac{1}{6}$ hors diagonale ; marginales uniformes ; dépendantes ; $|X-Y|$: $\frac{2}{3}$ en 1, $\frac{1}{3}$ en 2.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – Minimum et maximum de deux dés

a) Pour $i<j$, $(U,V)=(i,j)$ correspond aux deux couples (i,j) et (j,i) ; pour $i=j$, au seul couple (i,i) :

$$\mathbb{P}(U=i,V=j)=\frac{2}{36}\ (i<j),\qquad \frac{1}{36}\ (i=j),\qquad 0\ (i>j)$$

b) $\mathbb{P}(U=i)=\frac{1}{36}+\frac{2(6-i)}{36}=\frac{13-2i}{36}$; $\mathbb{P}(V=j)=\frac{1}{36}+\frac{2(j-1)}{36}=\frac{2j-1}{36}$.

c) $\mathbb{P}(U=1)=\frac{11}{36}$ et $\mathbb{P}(U=1,V=6)=\frac{2}{36}$, donc $\mathbb{P}(V=6\mid U=1)=\frac{2}{11}\approx 0{,}18$, alors que $\mathbb{P}(V=6)=\frac{11}{36}\approx 0{,}31$: savoir qu'un dé est petit diminue la probabilité que le maximum soit 6 (en fait, il faut alors que l'autre dé fasse 6).

Réponse. $\frac{2}{36}\ (i<j)$, $\frac{1}{36}\ (i=j)$; $U:\frac{13-2i}{36}$, $V:\frac{2j-1}{36}$; $\mathbb{P}(V=6\mid U=1)=\frac{2}{11}$.

Correction de l'exercice 4 – Loi conjointe de forme produit

a) $\sum_{i,j} c\,2^i3^j=c(1+2+4)(1+3+9)=91c=1$: $c=\frac{1}{91}$.

b) $\mathbb{P}(X=i)=\sum_j \frac{2^i3^j}{91}=\frac{13\times 2^i}{91}=\frac{2^i}{7}$; $\mathbb{P}(Y=j)=\frac{7\times 3^j}{91}=\frac{3^j}{13}$.

c) Pour tous i,j :

$$\mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j)=\frac{2^i}{7}\times\frac{3^j}{13}=\frac{2^i3^j}{91}=\mathbb{P}(X=i,Y=j)$$

d) $\mathbb{P}(X=Y)=\frac{1+6+36}{91}=\frac{43}{91}$.

Réponse. $c=\frac{1}{91}$; $X:\frac{2^i}{7}$, $Y:\frac{3^j}{13}$; indépendantes ; $\mathbb{P}(X=Y)=\frac{43}{91}$.

Correction de l'exercice 5 – Une somme modulo 3 indépendante

a) Pour x et z fixés, $Z=z$ et $X=x$ imposent $Y\equiv z-x \pmod 3$, une seule valeur :

$$\mathbb{P}(X=x,Z=z)=\mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{P}(Y=(z-x)\bmod 3)=\frac{1}{9}$$

b) $\mathbb{P}(Z=z)=\sum_x \frac{1}{9}=\frac{1}{3}$: uniforme. Et $\frac{1}{9}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$ pour tous x,z : indépendantes.

c) Non : Z est déterminé par (X,Y) ; par exemple $\mathbb{P}(X=0,Y=0,Z=1)=0\neq\frac{1}{27}$. (Elles sont indépendantes deux à deux, par le même calcul.)

d) Le message chiffré Z est indépendant du message X : l'observer n'apporte **aucune information** sur X (masque jetable de Vernam).

Réponse. $\mathbb{P}(X=x,Z=z)=\frac{1}{9}$; Z uniforme, indépendante de X ; pas d'indépendance mutuelle ; chiffrement parfait.

Correction de l'exercice 6 – Produit et maximum de variables de Bernoulli

a) Par indépendance, $\mathbb{P}(X=1,Y=1)=pq$, $\mathbb{P}(1,0)=p(1-q)$, $\mathbb{P}(0,1)=(1-p)q$, $\mathbb{P}(0,0)=(1-p)(1-q)$.

b) $XY\in\{0,1\}$ et $XY=1\Leftrightarrow X=Y=1$: $\mathbb{P}(XY=1)=pq$. $\max(X,Y)=0\Leftrightarrow X=Y=0$:

$$\mathbb{P}(\max(X,Y)=1)=1-(1-p)(1-q)$$

c) $X+Y\in\{0,1,2\}$, de loi $(1-p)(1-q)$, $p(1-q)+q(1-p)$, pq. C'est la loi $B(2,p)$ si et seulement si $p=q$.

d) Avec $X=\mathbf{1}_A$, $Y=\mathbf{1}_B$: $XY=\mathbf{1}_{A\cap B}$ et $\max(X,Y)=\mathbf{1}_{A\cup B}$; on retrouve $\mathbb{P}(A\cap B)=pq$ et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$\mathbb{P}(A \cup B) = 1 - (1-p)(1-q)$ pour des événements indépendants.

Réponse. $XY \sim B(pq)$; $\max \sim B(1-(1-p)(1-q))$; $X+Y \sim B(2,p)$ ssi $p = q$.

Correction de l'exercice 7 – Les marges ne déterminent pas la loi conjointe

a) Les marges imposent $\mathbb{P}(1,1) + \mathbb{P}(1,0) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(1,1) + \mathbb{P}(0,1) = \frac{1}{2}$, puis le total 1 :

$$\mathbb{P}(1,0) = \mathbb{P}(0,1) = \frac{1}{2} - t, \qquad \mathbb{P}(0,0) = t$$

— Toutes les cases doivent être positives : $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Il y a une **infinité** de lois conjointes compatibles.

b) Indépendance : $t = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (et alors toutes les cases valent $\frac{1}{4}$).

c) $t = 0$: $\mathbb{P}(X = Y) = 0$, soit $Y = 1 - X$ (anti-corrélation parfaite). $t = \frac{1}{2}$: $\mathbb{P}(X \neq Y) = 0$, soit $Y = X$.

Réponse. Cases $t, \frac{1}{2}-t, \frac{1}{2}-t, t$ avec $t \in [0, \frac{1}{2}]$; indépendance pour $t = \frac{1}{4}$; $Y = 1 - X$ ou $Y = X$ aux extrêmes.

Correction de l'exercice 8 – Lemme des coalitions

a) En regroupant les antécédents :

$$\mathbb{P}(f(X) = a, g(Y) = b) = \sum_{f(x)=a} \sum_{g(y)=b} \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y) = \left(\sum_{f(x)=a} \mathbb{P}(X = x)\right)\left(\sum_{g(y)=b} \mathbb{P}(Y = y)\right)$$

— ce qui vaut $\mathbb{P}(f(X) = a)\mathbb{P}(g(Y) = b)$.

b) Avec $f = \mathbf{1}_{\text{pair}}$ et $g(y) = \mathbf{1}_{y^2 > 10}$: $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes, donc les événements aussi.

c) Non : $X + Y = 2$ impose $X = Y = 1$, donc $X - Y = 0$: $\mathbb{P}(X+Y=2, X-Y=1) = 0$ alors que les deux probabilités sont non nulles. Le lemme ne s'applique pas, car $X+Y$ et $X-Y$ dépendent **toutes deux** de X et de Y.

Réponse. $f(X)$, $g(Y)$ indépendantes ; b) indépendants ; c) $X+Y$ et $X-Y$ dépendantes.

Correction de l'exercice 9 – Succès parmi les premiers essais, sachant le total

a) Pour une suite donnée comportant exactement k succès, $\mathbb{P} = p^k(1-p)^{n-k}$, **indépendamment** de la position des succès. Sachant $X = k$, chaque suite a donc probabilité $\dfrac{p^k(1-p)^{n-k}}{\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}} = \dfrac{1}{\binom{n}{k}}$.

b) Sachant $X = k$, on choisit uniformément k positions parmi n, dont m « marquées » (les premières) :

$$\mathbb{P}(Y = j \mid X = k) = \frac{\binom{m}{j}\binom{n-m}{k-j}}{\binom{n}{k}}$$

c) $\mathbb{P}(Y = 0 \mid X = 3) = \dfrac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \dfrac{20}{120} = \dfrac{1}{6}$, donc $\mathbb{P}(Y \geq 1 \mid X = 3) = \dfrac{5}{6}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. Positions uniformes ; $Y \mid X = k \sim H(n, m, k)$, indépendant de p ; c) $\frac{5}{6}$.

Correction de l'exercice 10 – Amincissement d'une loi binomiale

a) $X \sim B(n, p)$ et, sachant $X = k$, $Y \sim B(k, q)$.

b) $\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \binom{k}{j} q^j (1-q)^{k-j}$. Avec l'identité rappelée et $i = k - j$:

$$\mathbb{P}(Y = j) = \binom{n}{j} (pq)^j \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n-j}{i} (p(1-q))^i (1-p)^{n-j-i} = \binom{n}{j} (pq)^j (p(1-q) + 1 - p)^{n-j}$$

— et $p(1-q) + 1 - p = 1 - pq$.

c) Chaque graine donne une plante fleurie avec probabilité pq (germer **et** fleurir), indépendamment des autres : $Y \sim B(n, pq)$.

Réponse. $X \sim B(n, p)$, $Y \mid X = k \sim B(k, q)$; $Y \sim B(n, pq)$.

Correction de l'exercice 11 – Somme et différence de deux dés

a) $S = 2$ impose $(1, 1)$, donc $D = 0$: $\mathbb{P}(S = 2, D = 0) = \frac{1}{36}$. $\mathbb{P}(S = 2) = \frac{1}{36}$ et $\mathbb{P}(D = 0) = \frac{6}{36}$. Le produit vaut $\frac{6}{1\,296} \neq \frac{1}{36}$: **pas indépendantes**.

b) $S - D = 2Y$ est pair.

c) $S = 7$: 6 couples équiprobables $(1, 6), \ldots, (6, 1)$, de différences $-5, -3, -1, 1, 3, 5$:

$$\mathbb{P}(D = d \mid S = 7) = \frac{1}{6} \quad \text{pour } d \in \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$$

Réponse. Dépendantes ; même parité ; $D \mid S = 7$ uniforme sur $\{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$.

Correction de l'exercice 12 – Couple défini par une urne à trois couleurs

a) $\binom{10}{3} = 120$ tirages équiprobables. Pour $i + j \leq 3$:

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{\binom{2}{i}\binom{3}{j}\binom{5}{3-i-j}}{120}$$

— Par exemple $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \frac{2 \times 3 \times 5}{120} = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \frac{10}{120}$.

b) En sommant sur j (Vandermonde), $\mathbb{P}(X = i) = \frac{\binom{2}{i}\binom{8}{3-i}}{120}$: $X \sim H(10, 2, 3)$, soit $\frac{56}{120}, \frac{56}{120}, \frac{8}{120}$ pour $i = 0, 1, 2$.

c) Sachant $X = 1$, les 2 autres boules sont tirées parmi les 8 non blanches (3 rouges, 5 vertes) :

— $\mathbb{P}(Y = j \mid X = 1) = \frac{\binom{3}{j}\binom{5}{2-j}}{\binom{8}{2}}$: $\frac{10}{28}, \frac{15}{28}, \frac{3}{28}$ pour $j = 0, 1, 2$.

Réponse. $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{\binom{2}{i}\binom{3}{j}\binom{5}{3-i-j}}{120}$; $X \sim H(10, 2, 3)$; $Y \mid X = 1$: $\frac{10}{28}, \frac{15}{28}, \frac{3}{28}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 13 – Loi du couple (premier succès, nombre de succès)

a) Issues (P = Pile) et valeurs de (T, N) : *PPP* $(1,3)$; *PPF*, *PFP* $(1,2)$; *PFF* $(1,1)$; *FPP* $(2,2)$; *FPF* $(2,1)$; *FFP* $(3,1)$; *FFF* $(0,0)$. Chaque issue a probabilité $\frac{1}{8}$:

$$\mathbb{P}(1,3)=\frac{1}{8},\ \mathbb{P}(1,2)=\frac{2}{8},\ \mathbb{P}(1,1)=\frac{1}{8},\ \mathbb{P}(2,2)=\frac{1}{8},\ \mathbb{P}(2,1)=\frac{1}{8},\ \mathbb{P}(3,1)=\frac{1}{8},\ \mathbb{P}(0,0)=\frac{1}{8}$$

b) T : $\mathbb{P}(T=1)=\frac{4}{8}$, $\mathbb{P}(T=2)=\frac{2}{8}$, $\mathbb{P}(T=3)=\frac{1}{8}$, $\mathbb{P}(T=0)=\frac{1}{8}$. $N \sim B\left(3,\frac{1}{2}\right)$: $\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{3}{8},\frac{1}{8}$.

c) $\mathbb{P}(N=n \mid T=1)=\frac{\mathbb{P}(1,n)}{1/2}$: $\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}$ pour $n=1,2,3$. Sachant que le premier lancer est Pile, $N-1$ compte les Piles des deux lancers suivants : $N-1 \sim B\left(2,\frac{1}{2}\right)$.

Réponse. $N \sim B(3,\frac{1}{2})$; T : $\frac{4}{8},\frac{2}{8},\frac{1}{8}$ ($\frac{1}{8}$ pour $T=0$) ; $N-1 \mid T=1 \sim B(2,\frac{1}{2})$.

Correction de l'exercice 14 – Indépendance : une seule case ne suffit pas

a) L'égalité de la case $(1,1)$ est l'indépendance des événements $A=\{X=1\}$ et $B=\{Y=1\}$. Elle entraîne celle de A et $\overline{B}$, de $\overline{A}$ et B, de $\overline{A}$ et $\overline{B}$, c'est-à-dire l'égalité produit pour les cases $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,0)$:

$$\mathbb{P}(X=x,Y=y)=\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y) \quad \text{pour tout } (x,y)\in\{0,1\}^2$$

b) Chaque ligne et chaque colonne a pour somme $\frac{3}{9}$: les deux marginales sont uniformes sur $\{0,1,2\}$. Case $(0,0)$: $\frac{1}{9}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$, l'égalité est vérifiée. Mais case $(0,2)$: $0\neq\frac{1}{9}$: X et Y **ne sont pas indépendantes**. Au-delà de deux valeurs, il faut contrôler toutes les cases (une case fausse suffit à conclure à la dépendance, une case juste ne prouve rien).

Réponse. Cas binaire : une case suffit ; exemple à trois valeurs : case $(0,0)$ juste mais $(0,2)$ fausse, dépendantes.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : partage d'un secret en deux morceaux

a) $\mathbb{P}(S=s,M=m)=\mathbb{P}(S=s,K=s\oplus m)=\mathbb{P}(S=s)\times\frac{1}{2}$ (indépendance de S et K). En sommant sur s, $\mathbb{P}(M=m)=\frac{1}{2}$, et

$$\mathbb{P}(S=s,M=m)=\mathbb{P}(S=s)\,\mathbb{P}(M=m)$$

— M est uniforme et indépendante de S.

b) Par hypothèse (K est tirée indépendamment de S).

c) $K\oplus M=K\oplus S\oplus K=S$ (car $K\oplus K=0$).

d) Non : S est une fonction de (K,M). Par exemple, si $\mathbb{P}(S=1)=s\in\,]0,1[$, $\mathbb{P}(S=1,K=0,M=0)=0$ alors que le produit des probabilités vaut $s\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\neq 0$. Les trois variables sont indépendantes **deux à deux** (c'est tout l'intérêt du partage) sans l'être mutuellement.

Réponse. M uniforme, indépendante de S ; $S=K\oplus M$; indépendance deux à deux mais pas mutuelle.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).