Plaquette 1 – Lois, fonction de répartition, lois usuelles et couples

Variables aléatoires finies — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définitions.

— Une **variable aléatoire finie** X est une application de Ω dans un ensemble fini. Sa **loi** est la famille $(\mathbb{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$, de somme 1.

— **Fonction de répartition** : $F_X(t)=\mathbb{P}(X\leq t)$ — croissante, en escalier, de 0 à 1.

Lois usuelles.

— **Uniforme** sur $\{1,\dots,n\}$: $\mathbb{P}(X=k)=\dfrac{1}{n}$, $\mathbb{E}(X)=\dfrac{n+1}{2}$, $\mathrm{V}(X)=\dfrac{n^2-1}{12}$.

— **Bernoulli** $B(p)$: $X\in\{0,1\}$, $\mathbb{P}(X=1)=p$, $\mathbb{E}(X)=p$, $\mathrm{V}(X)=p(1-p)$.

— **Binomiale** $B(n,p)$: nombre de succès en n épreuves indépendantes,

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\qquad \mathbb{E}(X)=np,\qquad \mathrm{V}(X)=np(1-p)$$

— **Hypergéométrique** (tirage **sans remise** de n boules parmi N dont m « succès ») :

$$\mathbb{P}(X=k)=\frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Couples.

— **Loi conjointe** : $\mathbb{P}(X=x,\,Y=y)$. **Lois marginales** : on **somme** sur l'autre variable.

— X et Y sont **indépendantes** si $\mathbb{P}(X=x,Y=y)=\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)$ pour **tous** x,y.

— **Somme de binomiales indépendantes** de **même** p :
$B(n,p)+B(m,p)=B(n+m,p)$.

Théorème de transfert.

$$\mathbb{E}(g(X))=\sum_{x\in X(\Omega)}g(x)\,\mathbb{P}(X=x)$$

Correction de l'exercice 1 – Déterminer une loi

Support : $X(\Omega)=\{1,2,\dots,6\}$, et $|\Omega|=36$.

— **Méthode par la fonction de répartition** : $X\leq k$ signifie que les **deux** dés sont $\leq k$, soit k^2 cas.

— Donc $\mathbb{P}(X\leq k)=\dfrac{k^2}{36}$, et

$$\mathbb{P}(X=k)=\frac{k^2-(k-1)^2}{36}=\frac{2k-1}{36}$$

— **Loi** : $\dfrac{1}{36}$, $\dfrac{3}{36}$, $\dfrac{5}{36}$, $\dfrac{7}{36}$, $\dfrac{9}{36}$, $\dfrac{11}{36}$ pour $k=1,\dots,6$.

— **Contrôle** : la somme vaut $\dfrac{1+3+5+7+9+11}{36}=\dfrac{36}{36}=1$ ✓

— **Intérêt de la méthode** : passer par $\mathbb{P}(X\leq k)$ est bien plus rapide que d'énumérer les cas pour chaque valeur — réflexe à retenir pour un maximum ou un minimum.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{2k-1}{36}$ pour $1 \le k \le 6$.

Correction de l'exercice 2 – Fonction de répartition

Fonction de répartition (fonction en escalier, continue à droite) :

— $F_X(t) = 0$ pour $t < 0$;
— $F_X(t) = 0{,}2$ pour $0 \le t < 1$;
— $F_X(t) = 0{,}7$ pour $1 \le t < 2$;
— $F_X(t) = 1$ pour $t \ge 2$.
— **Calcul demandé** : $\mathbb{P}(0 < X \le 2) = F_X(2) - F_X(0) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.
— **Contrôle direct** : $\mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) = 0{,}5 + 0{,}3 = 0{,}8$ ✓
— **Attention aux bornes** : $F_X(2) - F_X(0)$ **exclut** $X = 0$ mais **inclut** $X = 2$ — d'où l'importance des inégalités strictes ou larges.

Réponse. 0,8.

Correction de l'exercice 3 – Loi binomiale

a) Les 10 questions sont des épreuves **identiques et indépendantes**, avec $p = \dfrac{1}{4}$ de succès.

— Donc $X \sim B(10\,;0{,}25)$.

b) - **Exactement 3** :

$$\mathbb{P}(X = 3) = \binom{10}{3}(0{,}25)^3(0{,}75)^7 = 120 \times 0{,}015625 \times 0{,}133484 \approx 0{,}2503$$

— **Au moins 1** (complémentaire) : $1 - (0{,}75)^{10} \approx 1 - 0{,}0563 = 0{,}9437$.
— **Contrôle** : l'espérance est $np = 2{,}5$, donc la valeur la plus probable est autour de 2 ou 3 — cohérent avec $\mathbb{P}(X = 3) \approx 25\,\%$ ✓
— **Lecture** : répondre au hasard donne presque toujours au moins une bonne réponse, mais très rarement la moyenne ($\mathbb{P}(X \ge 5) \approx 0{,}078$).

Réponse. a) $B(10\,;0{,}25)$ · b) $\approx 0{,}250$ et $\approx 0{,}944$.

Correction de l'exercice 4 – Loi hypergéométrique

X suit une **loi hypergéométrique** de paramètres $N = 12$, $m = 5$, $n = 4$.

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{7}{2}}{\binom{12}{4}} = \frac{10 \times 21}{495} = \frac{210}{495} = \frac{14}{33} \approx 0{,}424$$

— **Contrôle de cohérence** : l'espérance vaut $n\dfrac{m}{N} = 4 \times \dfrac{5}{12} \approx 1{,}67$, donc la valeur 2 doit être très probable ✓
— **Comparaison avec le tirage avec remise** : la binomiale $B\left(4\,;\frac{5}{12}\right)$ donnerait $\binom{4}{2}\left(\frac{5}{12}\right)^2\left(\frac{7}{12}\right)^2 \approx 0{,}354$.
— **Effet du sans-remise** : il concentre la loi autour de la moyenne (variance plus faible).

Réponse. $\dfrac{14}{33} \approx 0{,}424$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 5 – Loi d'une fonction de X

Chaque valeur de X a probabilité $\frac{1}{5}$.

— **Support de** Y : $\{0, 1, 4\}$.
— $Y = 0$ uniquement si $X = 0$: $\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{5}$.
— $Y = 1$ si $X = \pm 1$: $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{2}{5}$.
— $Y = 4$ si $X = \pm 2$: $\mathbb{P}(Y = 4) = \frac{2}{5}$.
— **Contrôle** : $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = 1$ ✓
— **Méthode générale** : pour la loi de $g(X)$, on **regroupe** les antécédents : $\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x\,:\,g(x)\,=\,y} \mathbb{P}(X = x)$.
— **Attention** : g n'étant pas injective ici, le support de Y est plus petit que celui de X.

Réponse. $\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{5}$, $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = 4) = \frac{2}{5}$.

Correction de l'exercice 6 – Loi conjointe

— **Loi conjointe** : $X = 2$ et $S = 5$ imposent le second dé égal à 3 — un seul cas sur 36.

$$\mathbb{P}(X = 2,\, S = 5) = \frac{1}{36}$$

— **Loi marginale de** S : $S = 5$ pour $(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$, soit $\mathbb{P}(S = 5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.
— **Test d'indépendance** : $\mathbb{P}(X = 2)\mathbb{P}(S = 5) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{54}$.
— Or $\frac{1}{36} \neq \frac{1}{54}$: X et S ne sont **pas indépendantes**.
— **C'était prévisible** : S **contient** l'information de X ; par exemple $\mathbb{P}(S = 2 \mid X = 6) = 0$ alors que $\mathbb{P}(S = 2) > 0$.
— **Retenir** : une variable et une fonction d'elle-même et d'une autre ne sont en général pas indépendantes.

Réponse. $\frac{1}{36}$ et $\frac{1}{9}$; non indépendantes.

Correction de l'exercice 7 – Lois marginales

Lois marginales : on somme chaque ligne, puis chaque colonne.

— $\mathbb{P}(X = 0) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$ et $\mathbb{P}(X = 1) = 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}7$.
— $\mathbb{P}(Y = 0) = 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}4$ et $\mathbb{P}(Y = 1) = 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}6$.
— **Contrôle** : les deux lois somment bien à 1, et le total du tableau vaut 1 ✓

Test d'indépendance : on compare chaque case au produit des marges.

— $\mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0) = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12 \neq 0{,}1$.
— L'égalité échoue dès la première case : X et Y ne sont **pas indépendantes**.
— **Remarque de méthode** : il suffit d'**une** case en défaut pour conclure à la dépendance ; en revanche, prouver l'indépendance exige de vérifier **toutes** les cases.

Réponse. X : $(0{,}3\,;0{,}7)$ · Y : $(0{,}4\,;0{,}6)$ · non indépendantes.

Correction de l'exercice 8 – Somme de variables indépendantes

Stabilité de la binomiale : deux binomiales indépendantes de **même paramètre** p s'additionnent.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $X+Y \sim B(5\,;0{,}5)$.
— **Justification** : X compte les succès de 3 épreuves, Y ceux de 2 autres épreuves indépendantes — au total 5 épreuves identiques indépendantes.

$$\mathbb{P}(X+Y=2)=\binom{5}{2}(0{,}5)^5=\frac{10}{32}=0{,}3125$$

— **Contrôle par convolution** :
$\mathbb{P}(X+Y=2)=\sum_{k=0}^{2}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=2-k)=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1+6+3}{32}=\frac{10}{32}$ ✓
— **Condition essentielle** : si les p diffèrent, la somme n'est **pas** binomiale.

Réponse. $B(5\,;0{,}5)$ et $\mathbb{P}(X+Y=2)=0{,}3125$.

Correction de l'exercice 9 – Minimum de deux variables

On passe par $\mathbb{P}(M\geq k)$, qui se factorise grâce à l'indépendance.

— $M\geq k$ signifie $X\geq k$ **et** $Y\geq k$, donc

$$\mathbb{P}(M\geq k)=\mathbb{P}(X\geq k)\mathbb{P}(Y\geq k)=\left(\frac{4-k}{3}\right)^2$$

— $\mathbb{P}(M\geq 1)=1$, $\mathbb{P}(M\geq 2)=\frac{4}{9}$, $\mathbb{P}(M\geq 3)=\frac{1}{9}$.
— **Par différences** :
— $\mathbb{P}(M=1)=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$;
— $\mathbb{P}(M=2)=\frac{4}{9}-\frac{1}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$;
— $\mathbb{P}(M=3)=\frac{1}{9}$.
— **Contrôle** : $\frac{5}{9}+\frac{3}{9}+\frac{1}{9}=1$ ✓ et $\mathbb{P}(M=3)=\mathbb{P}(X=Y=3)=\frac{1}{9}$ ✓
— **Méthode à retenir** : minimum → on travaille avec $\mathbb{P}(\cdot\geq k)$; maximum → avec $\mathbb{P}(\cdot\leq k)$.

Réponse. $\frac{5}{9}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$ pour $k=1,2,3$.

Correction de l'exercice 10 – Loi conditionnelle

On conditionne par le résultat D du dé (**système complet**).

— Sachant $D=k$, on a $X\sim B\left(k\,;\frac{1}{2}\right)$, donc $\mathbb{P}(X=0\mid D=k)=\left(\frac{1}{2}\right)^k$.
— **Probabilités totales** :

$$\mathbb{P}(X=0)=\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{6}\times\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1-\frac{1}{2}}$$

— La somme géométrique vaut $1-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$.
— Donc $\mathbb{P}(X=0)=\frac{63}{384}=\frac{21}{128}\approx 0{,}164$.
— **Contrôle de vraisemblance** : le nombre moyen de pièces lancées est 3,5, et $\left(\frac{1}{2}\right)^{3{,}5}\approx 0{,}088$; la valeur obtenue est plus grande, ce qui est normal car les petits k pèsent davantage (la fonction est convexe) ✓

Réponse. $\mathbb{P}(X=0)=\frac{21}{128}\approx 0{,}164$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 11 – Nombre de points fixes

Il y a 3! = 6 permutations équiprobables. On compte les **points fixes** de chacune.

— **Identité** (1 2 3) : 3 points fixes — 1 cas.
— **Transpositions** (trois d'entre elles) : exactement 1 point fixe — 3 cas.
— **Cycles de longueur 3** (deux d'entre eux) : 0 point fixe — 2 cas.
— **Loi** : $\mathbb{P}(X=0)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(X=1)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(X=2)=0$, $\mathbb{P}(X=3)=\frac{1}{6}$.
— **Contrôle** : la somme vaut 1 ✓ ; et $\mathbb{P}(X=2)=0$ est logique — si deux lettres sont bien placées, la troisième l'est forcément.
— **Espérance** : $0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{6}=1$. Remarquable : l'espérance vaut 1 **quel que soit** n (linéarité appliquée aux indicatrices).

Réponse. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{6}$ pour $k=0,1,2,3$.

Correction de l'exercice 12 – Indicatrices d'événements

a) $\mathbf{1}_A$ prend les valeurs 0 et 1, avec $\mathbb{P}(\mathbf{1}_A=1)=\mathbb{P}(A)$: c'est une variable de **Bernoulli** de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

b) On vérifie en chaque issue ω :

— $\mathbf{1}_A(\omega)\mathbf{1}_B(\omega)$ vaut 1 si et seulement si les deux valent 1, c'est-à-dire $\omega\in A\cap B$;
— $1-\mathbf{1}_A(\omega)=1\Leftrightarrow\omega\notin A$;
— $\mathbf{1}_{A\cup B}=1-\mathbf{1}_{\overline{A}\cap\overline{B}}=1-(1-\mathbf{1}_A)(1-\mathbf{1}_B)=\mathbf{1}_A+\mathbf{1}_B-\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$.

c) $N(\omega)$ est le **nombre** d'événements A_i réalisés en ω. $\{N=0\}=\overline{A_1}\cap\ldots\cap\overline{A_n}$.

d) N compte les succès de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p :

$$N\sim B(n,p)$$

Réponse. $\mathbf{1}_A\sim B(\mathbb{P}(A))$; $\mathbf{1}_{A\cap B}=\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$, $\mathbf{1}_{A\cup B}=\mathbf{1}_A+\mathbf{1}_B-\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$; $N\sim B(n,p)$.

Correction de l'exercice 13 – Le plus grand de deux numéros tirés sans remise

a) Univers : parties à 2 éléments de $[\![1,n]\!]$, $\binom{n}{2}$ issues équiprobables. $M=k$ $(2\le k\le n)$: l'autre jeton est l'un des $k-1$ numéros inférieurs :

$$\mathbb{P}(M=k)=\frac{k-1}{\binom{n}{2}}=\frac{2(k-1)}{n(n-1)}$$

b) $\sum_{k=2}^{n}(k-1)=\frac{(n-1)n}{2}=\binom{n}{2}$.

c) $F_M(k)=\mathbb{P}(M\le k)=\frac{\binom{k}{2}}{\binom{n}{2}}=\frac{k(k-1)}{n(n-1)}$ pour $2\le k\le n$ (les deux jetons sont $\le k$), 0 avant 2 et 1 après n.

d) $\mathbb{P}(M\ge 8)=1-F_M(7)=1-\frac{42}{90}=\frac{48}{90}=\frac{8}{15}$.

Réponse. $\mathbb{P}(M=k)=\frac{2(k-1)}{n(n-1)}$; $F_M(k)=\frac{k(k-1)}{n(n-1)}$; $\mathbb{P}(M\ge 8)=\frac{8}{15}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 14 – Transformer une loi uniforme

a) $x \mapsto 2x-5$ est injective : Y prend les valeurs $-5,-3,-1,1,3,5$, chacune avec probabilité $\frac{1}{6}$.

b) Loi de Z : on regroupe les antécédents, $\mathbb{P}(Z=0)=\mathbb{P}(X\in\{0,2,4\})=\frac{1}{2}=\mathbb{P}(Z=1)$. Loi de T : $\mathbb{P}(T=0)=\mathbb{P}(X\in\{0,4\})=\frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(T=1)=\mathbb{P}(X\in\{1,5\})=\frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(T=2)=\mathbb{P}(T=3)=\frac{1}{6}$.

c) U prend les valeurs $(x-2)^2$ pour $x=0,\dots,5$: $4,1,0,1,4,9$. Pour une fonction non injective, on somme sur les antécédents :

$$\mathbb{P}(U=u)=\sum_{x\,:\,(x-2)^2=u}\mathbb{P}(X=x)$$

— $\mathbb{P}(U=0)=\frac{1}{6}$, $\mathbb{P}(U=1)=\frac{2}{6}$, $\mathbb{P}(U=4)=\frac{2}{6}$, $\mathbb{P}(U=9)=\frac{1}{6}$.

d) Y (image injective d'une uniforme) et Z sont uniformes ; T et U ne le sont pas.

Réponse. Y uniforme sur $\{-5,-3,\dots,5\}$; $Z\sim B(\frac{1}{2})$; T : $\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6}$; U : $\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{6}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : contrôle qualité

a) **Acceptation** = aucune défectueuse parmi les 5 prélevées.

$$\mathbb{P}(X=0)=\frac{\binom{17}{5}}{\binom{20}{5}}=\frac{6\,188}{15\,504}\approx 0{,}399$$

— **Contrôle par les probabilités composées** : $\frac{17}{20}\times\frac{16}{19}\times\frac{15}{18}\times\frac{14}{17}\times\frac{13}{16}\approx 0{,}399$ ✓

— **Conclusion** : le lot a environ 40 % de chances d'être accepté malgré ses défauts.

b) On calcule $\mathbb{P}(X=0)=\dfrac{\binom{17}{n}}{\binom{20}{n}}$ pour différentes tailles :

— $n=5$: 0,399 ; $n=6$: 0,319 ; $n=7$: 0,251.

— Le seuil de 30 % est franchi entre 6 et 7 prélèvements.

— **Réponse** : il faut prélever **7 pièces** pour ramener le risque sous 30 % (environ 25,1 %).

— **Lecture industrielle** : c'est le principe du **plan d'échantillonnage** — on choisit la taille du prélèvement selon le risque que l'on accepte de courir.

Réponse. a) $\approx 0{,}399$ · b) 7 pièces (risque $\approx 25{,}1$ %).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).