Plaquette 2 – Lois usuelles et lois de fonctions d'une variable

Variables aléatoires finies — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Lois et transferts.

— Loi de X : $(\mathbb{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$, positive, de somme 1.

— **Loi image** : $\mathbb{P}(f(X)=y)=\sum_{x\in X(\Omega),\, f(x)=y}\mathbb{P}(X=x)$.

— **Fonction de répartition** : $F_X(t)=\mathbb{P}(X\leq t)$; pour X à valeurs entières,
$$\mathbb{P}(X=k)=F_X(k)-F_X(k-1)$$

— **Binomiale** $B(n,p)$: $\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$; si $X\sim B(n,p)$, alors $n-X\sim B(n,1-p)$.

— Quotient $\dfrac{\mathbb{P}(X=k+1)}{\mathbb{P}(X=k)}=\dfrac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)}$: la loi binomiale croît puis décroît, avec un maximum (mode) en $\lfloor (n+1)p\rfloor$.

— **Hypergéométrique** $H(N,m,n)$: $\dfrac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$; proche de $B\left(n,\frac{m}{N}\right)$ quand N est grand devant n.

Correction de l'exercice 1 – Mode d'une loi binomiale

a) $\dfrac{\binom{10}{k+1}0{,}3^{k+1}0{,}7^{9-k}}{\binom{10}{k}0{,}3^{k}0{,}7^{10-k}}=\dfrac{10-k}{k+1}\times\dfrac{0{,}3}{0{,}7}$, car $\dfrac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}}=\dfrac{n-k}{k+1}$.

b) Le quotient est >1 si et seulement si $0{,}3(10-k)>0{,}7(k+1)$, soit $3-0{,}3k>0{,}7k+0{,}7$, soit $k<2{,}3$. Les probabilités croissent jusqu'à $k=3$ puis décroissent : le mode est 3, et
$$\mathbb{P}(X=3)=\binom{10}{3}0{,}3^3\times 0{,}7^7=120\times 0{,}027\times 0{,}0824\approx 0{,}267$$

c) En général, le quotient est >1 si et seulement si $(n-k)p>(k+1)(1-p)$, soit $k<(n+1)p-1$. La loi croît tant que $k+1\leq\lfloor(n+1)p\rfloor$ et décroît ensuite : le maximum est en $\lfloor(n+1)p\rfloor$ (ici $\lfloor 3{,}3\rfloor=3$).

Réponse. Mode 3, $\mathbb{P}(X=3)\approx 0{,}267$; en général $\lfloor(n+1)p\rfloor$.

Correction de l'exercice 2 – Symétrie de la loi binomiale

a) Y compte les **échecs**, qui sont des « succès » de probabilité $1-p$ dans les mêmes épreuves indépendantes : $Y\sim B(n,1-p)$. Par le calcul :
$$\mathbb{P}(Y=k)=\mathbb{P}(X=n-k)=\binom{n}{n-k}p^{n-k}(1-p)^k=\binom{n}{k}(1-p)^kp^{n-k}$$

b) Si $p=\frac{1}{2}$, X et $n-X$ ont la même loi : $\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(X=n-k)$.

c) Par symétrie, $\mathbb{P}(X\geq 4)=\mathbb{P}(n-X\geq 4)=\mathbb{P}(X\leq 3)$. Ces deux événements sont complémentaires (7 est impair, pas de valeur centrale) : chacun a probabilité $\frac{1}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $n - X \sim B(n, 1-p)$; symétrie pour $p = \frac{1}{2}$; $\mathbb{P}(X \geq 4) = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 3 – Hypergéométrique ou binomiale ?

a) $X \sim H(100, 20, 5)$:

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{\binom{20}{1}\binom{80}{4}}{\binom{100}{5}} \approx 0{,}420$$

b) $Y \sim B(5, 0{,}2)$: $\mathbb{P}(Y = 1) = 5 \times 0{,}2 \times 0{,}8^4 = 0{,}4096$.

c) $\dfrac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \binom{n}{k}\dfrac{m(m-1)\cdots(m-k+1)\,(N-m)\cdots(N-m-n+k+1)}{N(N-1)\cdots(N-n+1)}$. Chacun des n facteurs du numérateur divisé par un facteur du dénominateur tend vers p (k facteurs) ou $1-p$ ($n-k$ facteurs), car n et k sont fixés. D'où la limite binomiale : tirer sans remise dans une grande urne, c'est presque tirer avec remise.

Réponse. $\mathbb{P}(X = 1) \approx 0{,}420$; $\mathbb{P}(Y = 1) = 0{,}4096$; convergence vers la binomiale.

Correction de l'exercice 4 – Rang du premier as

a) L'ensemble des positions des 4 as est une partie à 4 éléments de $[\![1, 52]\!]$, uniforme. $T = k$ signifie que la plus petite position est k, et les 3 autres sont choisies dans $[\![k+1, 52]\!]$:

$$\mathbb{P}(T = k) = \frac{\binom{52-k}{3}}{\binom{52}{4}}$$

b) $\sum_{k=1}^{49}\binom{52-k}{3} = \sum_{j=3}^{51}\binom{j}{3} = \binom{52}{4}$ (crosse de hockey).

c) $\mathbb{P}(T = 1) = \dfrac{\binom{51}{3}}{\binom{52}{4}} = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$. $\mathbb{P}(T > 10)$: les 4 as sont dans les 42 dernières positions, $\dfrac{\binom{42}{4}}{\binom{52}{4}} = \dfrac{111\,930}{270\,725} \approx 0{,}413$.

Réponse. $\mathbb{P}(T = k) = \dfrac{\binom{52-k}{3}}{\binom{52}{4}}$; $\mathbb{P}(T = 1) = \frac{1}{13}$; $\mathbb{P}(T > 10) \approx 0{,}413$.

Correction de l'exercice 5 – Écart entre deux dés

a) Sur les 36 couples équiprobables, on compte ceux d'écart d : 6 couples pour $d = 0$, et $2(6-d)$ pour $d \geq 1$ (les couples $(x, x+d)$ et $(x+d, x)$ avec $1 \leq x \leq 6-d$) :

$$\mathbb{P}(D = 0) = \frac{6}{36}, \qquad \mathbb{P}(D = d) = \frac{2(6-d)}{36} \quad (1 \leq d \leq 5)$$

— soit $\frac{6}{36}, \frac{10}{36}, \frac{8}{36}, \frac{6}{36}, \frac{4}{36}, \frac{2}{36}$; somme $\frac{36}{36}$.

b) $D = 1$, avec probabilité $\frac{10}{36}$.

c) $\mathbb{P}(D \leq 1) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. D : $\frac{6}{36}, \frac{10}{36}, \frac{8}{36}, \frac{6}{36}, \frac{4}{36}, \frac{2}{36}$; mode 1 ; $\mathbb{P}(D \le 1) = \frac{4}{9}$.

Correction de l'exercice 6 – Nombre de faces différentes

a) 216 issues. $N = 1$: 6 triplets constants, $\frac{6}{216} = \frac{1}{36}$. $N = 3$: arrangements, $6 \times 5 \times 4 = 120$, $\frac{120}{216} = \frac{5}{9}$.

b) $\mathbb{P}(N = 2) = 1 - \frac{6 + 120}{216} = \frac{90}{216} = \frac{5}{12}$. Directement : choisir la valeur doublée (6), l'autre valeur (5), la position de la valeur isolée (3) : $6 \times 5 \times 3 = 90$.

c) $\frac{6 \times 5 \times \cdots \times (6 - n + 1)}{6^n}$ pour $n \le 6$, nulle pour $n \ge 7$ (principe des tiroirs). Pour $n = 6$: $\frac{720}{46\,656} \approx 0{,}015$.

Réponse. $\mathbb{P}(N = 1) = \frac{1}{36}$, $\mathbb{P}(N = 2) = \frac{5}{12}$, $\mathbb{P}(N = 3) = \frac{5}{9}$.

Correction de l'exercice 7 – Retrouver la loi à partir de la fonction de répartition

a) $F(0) = 0$, $F(n) = 1$ et $k \mapsto \frac{k^2}{n^2}$ est croissante.

b) Par différences :

$$\mathbb{P}(X = k) = F(k) - F(k-1) = \frac{k^2 - (k-1)^2}{n^2} = \frac{2k - 1}{n^2}$$

— somme : $\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2$.

c) Si U, V sont indépendants uniformes et $M = \max(U, V)$, $\mathbb{P}(M \le k) = \mathbb{P}(U \le k)\mathbb{P}(V \le k) = \left(\frac{k}{n}\right)^2$.

d) $1 - F(k) = \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 = \mathbb{P}(U > k)\mathbb{P}(V > k) = \mathbb{P}(\min(U, V) > k)$: c'est la loi du **minimum**, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{(n - k + 1)^2 - (n - k)^2}{n^2} = \frac{2(n - k) + 1}{n^2}$.

Réponse. $\mathbb{P}(X = k) = \frac{2k - 1}{n^2}$ (maximum de deux uniformes) ; d) $\frac{2(n - k) + 1}{n^2}$ (minimum).

Correction de l'exercice 8 – Première boule blanche sans remise

a) L'ensemble des rangs des boules blanches est une partie à b éléments de $[\![1, N]\!]$, uniformément répartie (toutes les suites de tirage sont équiprobables). $T = k$: la plus petite est k, et les $b - 1$ autres sont dans $[\![k + 1, N]\!]$:

$$\mathbb{P}(T = k) = \frac{\binom{N - k}{b - 1}}{\binom{N}{b}}$$

b) $\binom{5}{2} = 10$: $\mathbb{P}(T = k) = \frac{5 - k}{10}$, soit $\frac{4}{10}, \frac{3}{10}, \frac{2}{10}, \frac{1}{10}$ pour $k = 1, 2, 3, 4$.

c) Une noire puis une blanche : $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$.

Réponse. $\mathbb{P}(T = k) = \frac{\binom{N - k}{b - 1}}{\binom{N}{b}}$; b) $\frac{5 - k}{10}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 9 – Carré d'une variable uniforme centrée

a) $X^2 \in \{0,1,4\}$:

$$\mathbb{P}(X^2=0)=\frac{1}{5},\quad \mathbb{P}(X^2=1)=\mathbb{P}(X\in\{-1,1\})=\frac{2}{5},\quad \mathbb{P}(X^2=4)=\frac{2}{5}$$

— $|X|$ a la même structure : $\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{2}{5}$ sur $\{0,1,2\}$.

b) $Y=g(|X|)$ avec $g(t)=t^2-2t$: $g(0)=0$, $g(1)=-1$, $g(2)=0$. Donc $\mathbb{P}(Y=-1)=\frac{2}{5}$ et $\mathbb{P}(Y=0)=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$.

c) X^3 est une fonction impaire de X : $-X^3=(-X)^3$, et $-X$ a la loi de X, donc $(-X)^3$ a la loi de X^3 (image d'une même loi par la même fonction).

Réponse. X^2 : $\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{2}{5}$; Y : $\mathbb{P}(Y=-1)=\frac{2}{5}$, $\mathbb{P}(Y=0)=\frac{3}{5}$.

Correction de l'exercice 10 – Loi conditionnelle d'une uniforme

a) Pour $k\le m$:

$$\mathbb{P}(X=k\mid X\le m)=\frac{\mathbb{P}(X=k)}{\mathbb{P}(X\le m)}=\frac{1/n}{m/n}=\frac{1}{m}$$

— et 0 pour $k>m$: X sachant $X\le m$ est **uniforme** sur $[\![1,m]\!]$.

b) Pour $1\le j\le n-m$: $\mathbb{P}(X-m=j\mid X>m)=\frac{1/n}{(n-m)/n}=\frac{1}{n-m}$: uniforme sur $[\![1,n-m]\!]$.

c) Sachant X pair, X est uniforme sur $\{2,4,\dots,100\}$ (50 valeurs), et $\frac{X}{2}$ est uniforme sur $[\![1,50]\!]$.

Réponse. Uniforme sur $[\![1,m]\!]$; uniforme sur $[\![1,n-m]\!]$; $\frac{X}{2}$ uniforme sur $[\![1,50]\!]$.

Correction de l'exercice 11 – Tronquer une variable binomiale

a) $\mathbb{P}(X=k)=\dfrac{\binom{5}{k}}{32}$: $\frac{1}{32},\frac{5}{32},\frac{10}{32},\frac{10}{32},\frac{5}{32},\frac{1}{32}$.

b) $Y=X$ si $X\le 3$, et $Y=3$ si $X\ge 3$. Donc $\mathbb{P}(Y=k)=\mathbb{P}(X=k)$ pour $k\le 2$, et

$$\mathbb{P}(Y=3)=\mathbb{P}(X\ge 3)=\frac{10+5+1}{32}=\frac{1}{2}$$

c) F_X : $\frac{1}{32},\frac{6}{32},\frac{16}{32},\frac{26}{32},\frac{31}{32},1$ en $0,\dots,5$. F_Y coïncide avec F_X en 0, 1, 2, et vaut 1 dès 3.

d) Y est le nombre de places occupées : on ne peut pas garer plus de 3 voitures. Avec probabilité $\frac{1}{2}$, le parking est plein (et, pour $X>3$, des voitures sont refusées).

Réponse. Y : $\frac{1}{32},\frac{5}{32},\frac{10}{32},\frac{16}{32}$; parking plein avec probabilité $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 12 – Somme de deux dés et fonction de répartition

a) $\mathbb{P}(S=s)=\dfrac{6-|s-7|}{36}$ pour $2\le s\le 12$.

b) Pour $s\le 7$, $\mathbb{P}(S=s)=\frac{s-1}{36}$, donc

$$F_S(k)=\sum_{s=2}^{k}\frac{s-1}{36}=\frac{1}{36}\times\frac{(k-1)k}{2}=\frac{(k-1)k}{72}$$

— Contrôle : $F_S(7)=\frac{42}{72}=\frac{21}{36}$ ($1+2+\dots+6=21$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $\mathbb{P}(4 \le S \le 9) = F_S(9) - F_S(3)$. $F_S(9) = 1 - \mathbb{P}(S \ge 10) = 1 - \frac{3+2+1}{36} = \frac{30}{36}$ et $F_S(3) = \frac{3}{36}$. Résultat $\frac{27}{36} = \frac{3}{4}$.

d) $(X, Y) \mapsto (7 - X, 7 - Y)$ est une bijection de $[\![1, 6]\!]^2$ qui transforme S en $14 - S$: S et $14 - S$ ont même loi, et $\mathbb{P}(S \le k) = \mathbb{P}(14 - S \le k) = \mathbb{P}(S \ge 14 - k)$.

Réponse. $F_S(k) = \frac{(k-1)k}{72}$ pour $k \le 7$; $\mathbb{P}(4 \le S \le 9) = \frac{3}{4}$; symétrie $S \leftrightarrow 14 - S$.

Correction de l'exercice 13 – Nombre de succès avant l'échec

a) Pour $k < n$: k Piles puis un Face, $\mathbb{P}(X = k) = p^k(1-p)$. Pour $k = n$: n Piles, $\mathbb{P}(X = n) = p^n$.

b) Somme géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n-1} p^k(1-p) + p^n = (1-p)\frac{1-p^n}{1-p} + p^n = 1$$

c) $X \ge k$ si et seulement si les k premiers lancers donnent Pile : $\mathbb{P}(X \ge k) = p^k$.

Réponse. $\mathbb{P}(X = k) = p^k(1-p)$ $(k < n)$, $\mathbb{P}(X = n) = p^n$; $\mathbb{P}(X \ge k) = p^k$.

Correction de l'exercice 14 – Nombre de points fixes pour n = 4

a) On choisit les k points fixes ($\binom{4}{k}$), puis une permutation **sans point fixe** des $4 - k$ autres (D_{4-k}) :

$$\mathbb{P}(F = k) = \frac{\binom{4}{k} D_{4-k}}{4!}$$

b) $k = 0$: $\frac{9}{24}$; $k = 1$: $\frac{4 \times 2}{24} = \frac{8}{24}$; $k = 2$: $\frac{6 \times 1}{24} = \frac{6}{24}$; $k = 3$: $\frac{4 \times 0}{24} = 0$; $k = 4$: $\frac{1}{24}$. Somme $\frac{9+8+6+0+1}{24} = 1$.

c) Si trois éléments sont fixes, le quatrième ne peut aller que sur lui-même : il est fixe aussi.

Réponse. F : $\frac{9}{24}, \frac{8}{24}, \frac{6}{24}, 0, \frac{1}{24}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : trois modèles pour un même tirage

a) $X \sim H(5, 3, 3)$, valeurs $1, 2, 3$ (au plus 2 noires, donc au moins 1 blanche) :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{2}{3-k}}{\binom{5}{3}}$$

— $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{3 \times 1}{10} = \frac{3}{10}$, $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{3 \times 2}{10} = \frac{6}{10}$, $\mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{10}$.

b) $X = 3$: $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$. $X = 1$: il faut les deux noires ; pour l'ordre BNN : $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$, et les trois positions de la blanche donnent le même produit : $\frac{3}{10}$. Puis $\mathbb{P}(X = 2) = 1 - \frac{4}{10} = \frac{6}{10}$. Même loi.

c) $X \sim B\left(3, \frac{3}{5}\right)$: $\frac{8}{125}, \frac{36}{125}, \frac{54}{125}, \frac{27}{125}$ pour $k = 0, 1, 2, 3$.

d) Avec remise, $X = 0$ devient possible ; le mode reste 2. Sans remise, la loi est plus concentrée (on ne peut pas retirer trois fois la même boule), mais elle a la même « moyenne » $3 \times \frac{3}{5} = 1{,}8$ ($\frac{3+12+3}{10} = 1{,}8$ et $\frac{36+108+81}{125} = 1{,}8$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. Sans remise : $\frac{3}{10}, \frac{6}{10}, \frac{1}{10}$ sur $\{1,2,3\}$; avec remise : $B(3, \frac{3}{5})$; moyenne 1,8 dans les deux cas.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).