Plaquette 5 – Modéliser avec des variables aléatoires

Variables aléatoires finies — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Boîte à outils de modélisation.

— **Comptage** : si les A_i sont mutuellement indépendants de probabilité p,

$$N = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i} \sim B(n,p)$$

— **Transformation affine** : si $Y = aX + b$ ($a \neq 0$), $\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}\left(X = \frac{y-b}{a}\right)$.

— **Rangs** : dans une permutation aléatoire uniforme, la position d'un objet donné est uniforme.

— **Fonction génératrice** d'une somme de variables indépendantes : produit des fonctions génératrices.

— **Simulation par inversion** : si U est uniforme sur $[0,1[$ et F la fonction de répartition d'une loi sur $\{x_1 < \ldots < x_r\}$, la variable qui vaut x_k lorsque $F(x_{k-1}) \leq U < F(x_k)$ suit cette loi.

Correction de l'exercice 1 – Boîtes vides

a) Au moins une boîte est occupée : $V \in \{0,1,2\}$.

b) 27 répartitions équiprobables (applications de 3 boules dans 3 boîtes). $V = 0$: bijections, 6. $V = 2$: les trois boules dans la même boîte, 3. $V = 1$: le reste, $27 - 6 - 3 = 18$.

$$\mathbb{P}(V=0) = \frac{6}{27}, \qquad \mathbb{P}(V=1) = \frac{18}{27}, \qquad \mathbb{P}(V=2) = \frac{3}{27}$$

c) $\mathbb{P}(A_j) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$. $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} \neq \left(\frac{8}{27}\right)^2$: pas indépendants (et $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \varnothing$). V n'est donc pas binomiale.

Réponse. V : $\frac{6}{27}, \frac{18}{27}, \frac{3}{27}$; $\mathbb{P}(A_j) = \frac{8}{27}$, événements dépendants.

Correction de l'exercice 2 – Nombre de records

a) Parmi les i premières valeurs, chacune a la même probabilité d'être la plus grande (symétrie de la permutation uniforme) : la dernière l'est avec probabilité $\frac{1}{i}$.

b) $I_i \sim B\left(\frac{1}{i}\right)$, de fonction génératrice $1 - \frac{1}{i} + \frac{t}{i} = \frac{t+i-1}{i}$. Par indépendance, $G_R = \prod_i G_{I_i}$.

c) $n = 4$: $G_R(t) = \frac{t(t+1)(t+2)(t+3)}{24} = \frac{t^4 + 6t^3 + 11t^2 + 6t}{24}$:

$$\mathbb{P}(R=1) = \frac{6}{24}, \quad \mathbb{P}(R=2) = \frac{11}{24}, \quad \mathbb{P}(R=3) = \frac{6}{24}, \quad \mathbb{P}(R=4) = \frac{1}{24}$$

— $R = 4$: ordre croissant, une seule permutation. $R = 1$: la plus grande valeur en tête, $3! = 6$ permutations.

Réponse. $\mathbb{P}(I_i = 1) = \frac{1}{i}$; $G_R = \prod \frac{t+i-1}{i}$; $n = 4$: $\frac{6}{24}, \frac{11}{24}, \frac{6}{24}, \frac{1}{24}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 3 – Nombre de séries dans une suite de pile ou face

a) Chaque changement de résultat commence une nouvelle série, et la première série commence au lancer 1.

b) $\mathbb{P}(C_i = 1) = \mathbb{P}(PF) + \mathbb{P}(FP) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Donc $R - 1 \sim B\left(n-1, \frac{1}{2}\right)$:

$$\mathbb{P}(R = r) = \frac{\binom{n-1}{r-1}}{2^{n-1}}, \qquad 1 \le r \le n$$

c) $n = 10$: $\mathbb{P}(R \le 3) = \dfrac{\binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \binom{9}{2}}{512} = \dfrac{1 + 9 + 36}{512} = \dfrac{46}{512} \approx 0{,}09$. Une suite de 10 lancers avec seulement 2 ou 3 séries est suspecte (trop « groupée ») ; à l’inverse, R proche de 10 (alternance quasi parfaite) l’est aussi. Les humains qui « inventent » du hasard produisent souvent trop de séries.

Réponse. $R - 1 \sim B(n-1, \frac{1}{2})$; $n = 10$: $\mathbb{P}(R \le 3) = \frac{46}{512} \approx 0{,}09$.

Correction de l’exercice 4 – Attendre deux succès

a) $T = k$: le k-ième appel est un succès, et parmi les $k-1$ précédents il y a exactement un succès ($k-1$ positions possibles). Chaque suite a probabilité $p^2(1-p)^{k-2}$:

$$\mathbb{P}(T = k) = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}$$

b) $p^2 = 0{,}09$: $\mathbb{P}(T=2) = 0{,}09$, $\mathbb{P}(T=3) = 2 \times 0{,}09 \times 0{,}7 = 0{,}126$, $\mathbb{P}(T=4) = 3 \times 0{,}09 \times 0{,}49 = 0{,}1323$. Donc $\mathbb{P}(T \le 4) = 0{,}3483$.

— $\mathbb{P}(T=5) = 4 \times 0{,}09 \times 0{,}343 \approx 0{,}1235$ et $\mathbb{P}(T=6) = 5 \times 0{,}09 \times 0{,}2401 \approx 0{,}1080$; $\mathbb{P}(T=0) = 1 - 0{,}3483 - 0{,}1235 - 0{,}1080 \approx 0{,}420$.

c) $T = 0$ si et seulement si le nombre X de succès en 6 appels est au plus 1, avec $X \sim B(6, 0{,}3)$: $0{,}7^6 + 6 \times 0{,}3 \times 0{,}7^5 \approx 0{,}1176 + 0{,}3025 = 0{,}420$.

Réponse. $\mathbb{P}(T=k) = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}$; $\mathbb{P}(T \le 4) \approx 0{,}348$; $\mathbb{P}(T=0) \approx 0{,}420$.

Correction de l’exercice 5 – Gains à la roulette

a) $B \sim B\left(3, \frac{18}{37}\right)$ et $G = B - (3 - B) = 2B - 3 \in \{-3, -1, 1, 3\}$. Avec $p = \frac{18}{37}$, $q = \frac{19}{37}$:

$$\mathbb{P}(G = 2k - 3) = \binom{3}{k} p^k q^{3-k}$$

— soit, avec $37^3 = 50\,653$: $\mathbb{P}(G=-3) = \frac{6\,859}{50\,653} \approx 0{,}135$, $\mathbb{P}(G=-1) = \frac{3 \times 18 \times 361}{50\,653} \approx 0{,}385$, $\mathbb{P}(G=1) = \frac{3 \times 324 \times 19}{50\,653} \approx 0{,}365$, $\mathbb{P}(G=3) = \frac{5\,832}{50\,653} \approx 0{,}115$.

b) $\mathbb{P}(G > 0) = \mathbb{P}(B \ge 2) \approx 0{,}365 + 0{,}115 = 0{,}480$.

c) Avec $p = \frac{1}{2}$: $\mathbb{P}(G > 0) = \frac{1}{2}$ exactement. La case verte (0) suffit à rendre le jeu défavorable au joueur.

Réponse. $G = 2B - 3$, $B \sim B(3, \frac{18}{37})$; $\mathbb{P}(G > 0) \approx 0{,}480$ contre $\frac{1}{2}$.

Correction de l’exercice 6 – Simuler une loi par inversion

a) La fonction renvoie 2 exactement quand $0{,}2 \le u < 0{,}7$:

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(0{,}2 \le U < 0{,}7) = 0{,}5$$

— de même $\mathbb{P}(U < 0{,}2) = 0{,}2$ et $\mathbb{P}(U \ge 0{,}7) = 0{,}3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Ce sont les valeurs de la fonction de répartition : $F_X(1) = 0{,}2$, $F_X(2) = 0{,}7$, $F_X(3) = 1$. On découpe $[0, 1[$ en intervalles de longueurs $\mathbb{P}(X = x_k)$, et X prend la valeur x_k quand U tombe dans le k-ième intervalle : c'est la **méthode d'inversion**.

c) Une variable de Bernoulli s'obtient en testant *random()* $< p$:

```
def binomiale(n, p):
    s = 0
    for _ in range(n):
        if random() < p:
            s = s + 1
    return s
```

Réponse. Intervalles $[0; 0{,}2[$, $[0{,}2; 0{,}7[$, $[0{,}7; 1[$ donnés par F_X ; binomiale = somme de Bernoulli.

Correction de l'exercice 7 – Retransmissions sur un réseau

a) $N = k < 4$: $k - 1$ pertes puis une réception, $\mathbb{P}(N = k) = 0{,}1^{k-1} \times 0{,}9$. $N = 4$: les 3 premiers envois sont perdus, $\mathbb{P}(N = 4) = 0{,}1^3 = 0{,}001$ (le quatrième envoi a lieu, qu'il réussisse ou non).

$$\mathbb{P}(N = 1) = 0{,}9, \quad \mathbb{P}(N = 2) = 0{,}09, \quad \mathbb{P}(N = 3) = 0{,}009, \quad \mathbb{P}(N = 4) = 0{,}001$$

b) Les 4 envois perdus : $0{,}1^4 = 10^{-4}$.

c) Avec m envois : $0{,}1^m \leq 10^{-6} \Leftrightarrow m \geq 6$.

Réponse. N : $0{,}9; 0{,}09; 0{,}009; 0{,}001$; perte définitive 10^{-4} ; 6 envois.

Correction de l'exercice 8 – Position d'une carte donnée

a) Pour k fixé, les permutations plaçant l'as de pique en position k sont au nombre de $51!$: $\mathbb{P}(P = k) = \frac{51!}{52!} = \frac{1}{52}$.

b) Pour $k \neq \ell$: $\mathbb{P}(P = k, Q = \ell) = \frac{50!}{52!} = \frac{1}{52 \times 51}$ (uniforme sur les couples distincts). Pour $d \in [\![1, 51]\!]$, il y a $2(52 - d)$ couples d'écart d :

$$\mathbb{P}(|P - Q| = d) = \frac{2(52 - d)}{52 \times 51}$$

c) $d = 1$: $\frac{2 \times 51}{52 \times 51} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$.

Réponse. P uniforme ; $\mathbb{P}(|P - Q| = d) = \frac{2(52 - d)}{52 \times 51}$; voisins : $\frac{1}{26}$.

Correction de l'exercice 9 – Transfert entre deux urnes

a) $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{3}$. Si $X = 1$, U_2 contient 2 blanches sur 4 ; si $X = 0$, 1 blanche sur 4 :

$$\mathbb{P}(1, 1) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(1, 0) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(0, 1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}, \quad \mathbb{P}(0, 0) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

b) $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$, $\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{7}{12}$.

c) $\mathbb{P}(X = 1 \mid Y = 1) = \frac{1/3}{5/12} = \frac{4}{5}$.

Réponse. (X, Y) : $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{1}{4}$; $Y \sim B(\frac{5}{12})$; $\mathbb{P}(X = 1 \mid Y = 1) = \frac{4}{5}$.

Correction de l'exercice 10 – Coût de production

a) $C = 100 + 20X$ avec $X \sim B(5, 0{,}1)$. La transformation est affine et injective :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\mathbb{P}(C = 100 + 20k) = \binom{5}{k} 0{,}1^k 0{,}9^{5-k}$$

— $\mathbb{P}(C = 100) \approx 0{,}590$, $\mathbb{P}(C = 120) \approx 0{,}328$, $\mathbb{P}(C = 140) \approx 0{,}0729$, $\mathbb{P}(C = 160) \approx 0{,}0081$, $\mathbb{P}(C = 180) \approx 0{,}00045$, $\mathbb{P}(C = 200) = 0{,}00001$.

b) $C > 130 \Leftrightarrow X \geq 2$: $1 - 0{,}9^5 - 5 \times 0{,}1 \times 0{,}9^4 = 1 - 0{,}59049 - 0{,}32805 \approx 0{,}081$.

c) Au moins une pièce défectueuse : $1 - 0{,}9^5 \approx 0{,}41$.

Réponse. $C = 100 + 20X$, $X \sim B(5, 0{,}1)$; $\mathbb{P}(C > 130) \approx 0{,}081$; seconde série : $\approx 0{,}41$.

Correction de l’exercice 11 – Boules noires restantes

a) Tirer sans remise jusqu’au bout revient à ranger les boules dans un ordre aléatoire uniforme. Les positions des noires forment une partie à 2 éléments, chacune des $\binom{5}{2} = 10$ étant équiprobable.

b) R compte les noires situées après la dernière blanche.

— $R = 2$: noires en positions 4 et 5, $\frac{1}{10}$.

— $R = 1$: une noire en position 5, l’autre en position ≤ 3 (sinon elles seraient en 4 et 5) : $\frac{3}{10}$.

— $R = 0$: la position 5 est blanche : $\frac{\binom{4}{2}}{10} = \frac{6}{10}$.

c) $N = b + 2$ boules, $\binom{b+2}{2}$ parties : $\mathbb{P}(R = 2) = \frac{1}{\binom{b+2}{2}}$, $\mathbb{P}(R = 1) = \frac{b}{\binom{b+2}{2}}$,

$\mathbb{P}(R = 0) = \frac{\binom{b+1}{2}}{\binom{b+2}{2}} = \frac{b}{b+2}$.

Réponse. R : $\frac{6}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{10}$ pour $0, 1, 2$.

Correction de l’exercice 12 – Code à répétition

a) $E \sim B(3, p)$.

b) $\varepsilon(p) = \mathbb{P}(E \geq 2) = 3p^2(1-p) + p^3 = 3p^2 - 2p^3$.

c) $p = 0{,}1$: $\varepsilon = 0{,}03 - 0{,}002 = 0{,}028$, près de 4 fois moins que 0,1 (au prix d’un débit divisé par 3). En général :

$$\varepsilon(p) < p \Leftrightarrow 3p^2 - 2p^3 < p \Leftrightarrow p(2p-1)(p-1) < 0 \Leftrightarrow 0 < p < \frac{1}{2}$$

— Le code n’améliore les choses que si le canal fait moins d’une erreur sur deux.

Réponse. $E \sim B(3, p)$; $\varepsilon = 3p^2 - 2p^3$; 0,028 pour $p = 0{,}1$; utile ssi $p < \frac{1}{2}$.

Correction de l’exercice 13 – Sondage électoral

a) $X \sim B(n, 0{,}52)$: chaque personne interrogée est indépendante des autres (modèle avec remise, ou grande population).

b) $\mathbb{P}(X \leq 2) = 0{,}48^5 + 5 \times 0{,}52 \times 0{,}48^4 + 10 \times 0{,}52^2 \times 0{,}48^3$:

$$\approx 0{,}0255 + 0{,}1380 + 0{,}2990 \approx 0{,}46$$

c) $n = 1$: $\mathbb{P}(X = 0) = 0{,}48$. $n = 3$:
$\mathbb{P}(X \leq 1) = 0{,}48^3 + 3 \times 0{,}52 \times 0{,}48^2 \approx 0{,}111 + 0{,}359 = 0{,}470$. Avec un si petit échantillon,

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

le sondage se trompe presque une fois sur deux ; il faut des milliers de personnes pour trancher un écart de 52 / 48.

Réponse. $X \sim B(n, 0{,}52)$; erreur $\approx 0{,}46$ ($n = 5$), $0{,}48$ ($n = 1$), $0{,}47$ ($n = 3$).

Correction de l'exercice 14 – Lancers jusqu'au premier six (tronqués)

a) Pour $k < n$: $k-1$ lancers sans 6 puis un 6, $\mathbb{P}(L = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\frac{1}{6}$. Pour $k = n$: les $n-1$ premiers lancers ne donnent pas 6 (le n-ième lancer a lieu de toute façon) :

$$\mathbb{P}(L = n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

b) C'est la probabilité de devoir aller jusqu'au bout, que le dernier lancer donne 6 ou non.

c) $\mathbb{P}(L \leq 3) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216} \approx 0{,}421$; $\mathbb{P}(L = 10) = \left(\frac{5}{6}\right)^9 \approx 0{,}194$.

Réponse. $\mathbb{P}(L = k) = (\frac{5}{6})^{k-1}\frac{1}{6}$ ($k < n$), $\mathbb{P}(L = n) = (\frac{5}{6})^{n-1}$; 0,421 et 0,194.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : un QCM noté avec pénalité

a) $B \sim B\left(4, \frac{1}{4}\right)$ et

$$N = B - \frac{1}{4}(4 - B) = \frac{5B - 4}{4}$$

b) $\mathbb{P}(B = k) = \binom{4}{k}\frac{3^{4-k}}{256}$: $\frac{81}{256}, \frac{108}{256}, \frac{54}{256}, \frac{12}{256}, \frac{1}{256}$. Donc N vaut -1, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{11}{4}$, 4 avec ces probabilités.

c) $N \geq 0 \Leftrightarrow B \geq 1$: $1 - \frac{81}{256} = \frac{175}{256} \approx 0{,}684$. $N \geq 2 \Leftrightarrow 5B \geq 12 \Leftrightarrow B \geq 3$: $\frac{13}{256} \approx 0{,}051$.

d) $B \sim B\left(4, \frac{1}{3}\right)$: $\mathbb{P}(B \geq 3) = 4 \times \frac{1}{27} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{81} = \frac{8}{81} + \frac{1}{81} = \frac{1}{9} \approx 0{,}111$. Éliminer une réponse fausse double presque la probabilité d'avoir au moins 2.

Réponse. $N = \frac{5B-4}{4}$, $B \sim B(4, \frac{1}{4})$; $\mathbb{P}(N \geq 0) = \frac{175}{256}$, $\mathbb{P}(N \geq 2) = \frac{13}{256}$; avec élimination : $\frac{1}{9}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).