Plaquette 4 – Sommes, maximums et fonctions génératrices de variables indépendantes

Variables aléatoires finies — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Variables indépendantes à valeurs entières.

— **Convolution** : si X et Y sont indépendantes,

$$\mathbb{P}(X+Y=s)=\sum_k \mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=s-k)$$

— **Stabilité** : $B(n,p)+B(m,p)=B(n+m,p)$ (indépendantes, même p) ; une somme de n variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p suit $B(n,p)$.

— **Maximum, minimum** de $X_1,\dots,X_n$ indépendantes :

$$\mathbb{P}(\max \le k)=\prod_i \mathbb{P}(X_i\le k),\qquad \mathbb{P}(\min > k)=\prod_i \mathbb{P}(X_i>k)$$

— **Fonction génératrice** (polynôme) : $G_X(t)=\sum_k \mathbb{P}(X=k)t^k$, $G_X(1)=1$; la loi se lit sur les coefficients.

— Pour X, Y indépendantes : $G_{X+Y}=G_XG_Y$. Exemples : $B(p)$: $1-p+pt$; $B(n,p)$: $(1-p+pt)^n$.

Correction de l'exercice 1 – Convolution : la somme de deux dés

a) En décomposant selon la valeur de X et par indépendance :

$$\mathbb{P}(X+Y=s)=\sum_{k=1}^{6}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=s-k)$$

— où seuls comptent les k tels que $1\le s-k\le 6$, soit $\max(1,s-6)\le k\le \min(6,s-1)$.

b) Chaque terme vaut $\frac{1}{36}$. Le nombre de termes est $s-1$ si $s\le 7$ et $13-s$ si $s\ge 7$, soit $6-|s-7|$ dans les deux cas.

c) Même calcul : $\mathbb{P}(X+Y=s)=\dfrac{n-|s-(n+1)|}{n^2}$ pour $2\le s\le 2n$ (loi « triangulaire » de sommet $n+1$).

Réponse. $\mathbb{P}(X+Y=s)=\dfrac{6-|s-7|}{36}$; en général $\dfrac{n-|s-n-1|}{n^2}$.

Correction de l'exercice 2 – Stabilité de la loi binomiale

a) Pour $0\le s\le n+m$:

$$\mathbb{P}(X+Y=s)=\sum_k \binom{n}{k}p^kq^{n-k}\binom{m}{s-k}p^{s-k}q^{m-s+k}=p^sq^{n+m-s}\sum_k\binom{n}{k}\binom{m}{s-k}$$

— $(q=1-p)$, et Vandermonde donne $\sum_k\binom{n}{k}\binom{m}{s-k}=\binom{n+m}{s}$.

b) X compte les succès de n épreuves, Y ceux de m autres épreuves indépendantes des premières, de même paramètre : $X+Y$ compte les succès de $n+m$ épreuves indépendantes.

c) $G_{X+Y}(t)=(q+pt)^n(q+pt)^m=(q+pt)^{n+m}$, fonction génératrice de $B(n+m,p)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $X+Y\sim B(n+m,p)$ (Vandermonde, épreuves, ou $G=(q+pt)^{n+m}$).

Correction de l'exercice 3 – Somme de binomiales de paramètres différents

a) $\mathbb{P}(S=0)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$, $\mathbb{P}(S=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$, $\mathbb{P}(S=1)=1-\frac{3}{8}-\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$.

b) Si $S\sim B(2,r)$, alors $r^2=\frac{1}{8}$ et $(1-r)^2=\frac{3}{8}$, d'où $r=\frac{1}{2\sqrt{2}}\approx 0{,}354$ et $1-r=\sqrt{\frac{3}{8}}\approx 0{,}612$: la somme ne fait pas 1. Contradiction.

c) $G_S(t)=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}t+\frac{1}{8}t^2=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\right)\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}t\right)$: produit de deux facteurs différents, alors qu'une loi $B(2,r)$ aurait $G=(1-r+rt)^2$, un carré.

Réponse. S : $\frac{3}{8},\frac{1}{2},\frac{1}{8}$; pas binomiale ; $G_S=(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t)(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}t)$.

Correction de l'exercice 4 – Somme de deux uniformes et loi triangulaire

a) Convolution : le nombre de couples de somme s est $s+1$ pour $0\le s\le n-1$ et $2n-1-s$ pour $n-1\le s\le 2n-2$:

$$\mathbb{P}(S=s)=\frac{\min(s+1,2n-1-s)}{n^2}$$

b) Pour r fixé, $R=r$ si et seulement si $Y\equiv r-X \pmod n$: pour chaque valeur de X, une seule valeur de Y convient. Donc $\mathbb{P}(R=r)=n\times\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}$: R est **uniforme**.

c) $n=10$: $\mathbb{P}(S=9)=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$ (maximum de la loi triangulaire) ; chiffre des unités 9 : $\frac{1}{10}$ aussi, par b) (les sommes 9 et 19 ; mais 19 est impossible ici, car $S\le 18$).

Réponse. $\mathbb{P}(S=s)=\frac{\min(s+1,2n-1-s)}{n^2}$; R uniforme ; c) $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{10}$.

Correction de l'exercice 5 – Maximum de n variables uniformes

a) $\{M\le k\}=\bigcap_i\{X_i\le k\}$, par indépendance :

$$\mathbb{P}(M\le k)=\left(\frac{k}{N}\right)^n,\qquad \mathbb{P}(M=k)=\frac{k^n-(k-1)^n}{N^n}$$

b) $\mathbb{P}(M=6)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{671}{1\,296}\approx 0{,}518$; $\mathbb{P}(M\le 3)=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$.

c) $\mathbb{P}(M=N)=1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\to 1$ car $0<1-\frac{1}{N}<1$. Avec beaucoup de tirages, la valeur maximale finit presque sûrement par sortir.

Réponse. $\mathbb{P}(M\le k)=(\frac{k}{N})^n$; 4 dés : $\mathbb{P}(M=6)\approx 0{,}518$, $\mathbb{P}(M\le 3)=\frac{1}{16}$.

Correction de l'exercice 6 – Minimum de variables indépendantes

a) $\{T>k\}=\bigcap_i\{X_i>k\}$:

$$\mathbb{P}(T>k)=(0{,}8^k)^3=0{,}512^k$$

b) $\mathbb{P}(T=k)=\mathbb{P}(T>k-1)-\mathbb{P}(T>k)=0{,}512^{k-1}(1-0{,}512)=0{,}488\times 0{,}512^{k-1}$: même forme que pour un composant, avec 0,512 au lieu de 0,8.

c) $\mathbb{P}(T>2)=0{,}512^2\approx 0{,}262$, contre $0{,}8^2=0{,}64$ pour un composant seul : le montage en série raccourcit nettement la durée de vie.

Réponse. $\mathbb{P}(T>k)=0{,}512^k$; $\mathbb{P}(T>2)\approx 0{,}262$ contre 0,64.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 7 – Le collectionneur de vignettes

a) Une suite de n achats est une application de $[\![1,n]\!]$ dans l'ensemble des 3 vignettes, uniforme parmi 3^n. Collection complète : surjection, $3^n - 3\times 2^n + 3$:

$$\mathbb{P}(C_n) = \frac{3^n - 3\times 2^n + 3}{3^n} = 1 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

b) $n=3$: $\frac{6}{27} = \frac{2}{9}$; $n=4$: $\frac{36}{81} = \frac{4}{9}$; $n=5$: $\frac{150}{243} = \frac{50}{81} \approx 0{,}617$.

c) $n=7$: $1 - 3\times 0{,}0585 + 3\times 0{,}000457 \approx 0{,}826$; $n=8$:
$1 - 3\times 0{,}0390 + 3\times 0{,}000152 \approx 0{,}883$; $n=9$: $1 - 3\times 0{,}0260 + 0{,}00015 \approx 0{,}922$. Il faut 9 achats.

Réponse. $1 - 3(\frac{2}{3})^n + 3(\frac{1}{3})^n$; $\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{50}{81}$; 9 achats pour 0,9.

Correction de l'exercice 8 – Marche aléatoire sur une droite

a) Avec B pas $+1$ et $n-B$ pas -1 : $S_n = B - (n-B) = 2B - n$. $B \sim B\left(n, \frac{1}{2}\right)$, donc

$$\mathbb{P}(S_n = 2k-n) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}, \qquad 0 \le k \le n$$

b) S_n prend les valeurs $-n, -n+2, \dots, n$ (même parité que n).
$\mathbb{P}(S_4 = 0) = \mathbb{P}(B=2) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$; $\mathbb{P}(S_4 = 2) = \mathbb{P}(B=3) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

c) $|S_{10}| \ge 6 \Leftrightarrow |2B-10| \ge 6 \Leftrightarrow B \le 2$ ou $B \ge 8$. Par symétrie :
$2 \times \frac{\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \binom{10}{2}}{1\,024} = 2 \times \frac{56}{1\,024} = \frac{7}{64} \approx 0{,}109$.

Réponse. $\mathbb{P}(S_n = 2k-n) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$; $\mathbb{P}(S_4=0) = \frac{3}{8}$, $\mathbb{P}(S_4=2) = \frac{1}{4}$; $\mathbb{P}(|S_{10}| \ge 6) = \frac{7}{64}$.

Correction de l'exercice 9 – Loi d'une variable sachant la somme

a) $\{X=k, X+Y=s\} = \{X=k, Y=s-k\}$; par indépendance, et parce que $X+Y \sim B(n+m,p)$:

$$\mathbb{P}(X=k \mid X+Y=s) = \frac{\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\binom{m}{s-k}p^{s-k}q^{m-s+k}}{\binom{n+m}{s}p^s q^{n+m-s}} = \frac{\binom{n}{k}\binom{m}{s-k}}{\binom{n+m}{s}}$$

b) C'est la loi $H(n+m, n, s)$: les puissances de p et q se sont simplifiées.

c) Sachant s pannes au total, tout se passe comme si l'on choisissait au hasard les s machines en panne parmi les $n+m$: le nombre de pannes du premier atelier suit $H(n+m, n, s)$, quelle que soit la fiabilité p.

Réponse. $\mathbb{P}(X=k \mid X+Y=s) = \frac{\binom{n}{k}\binom{m}{s-k}}{\binom{n+m}{s}}$, loi hypergéométrique indépendante de p.

Correction de l'exercice 10 – Nombre total de six

a) $N_1 \sim B\left(5, \frac{1}{6}\right)$ et $N_2 \sim B\left(5, \frac{1}{6}\right)$ sont indépendantes, donc

$$N = N_1 + N_2 \sim B\left(10, \frac{1}{6}\right)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $\mathbb{P}(N=0) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0{,}162$; $\mathbb{P}(N=1) = 10 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{9} \approx 0{,}323$;
$\mathbb{P}(N \geq 2) \approx 1 - 0{,}162 - 0{,}323 = 0{,}515$.

c) Par l'exercice précédent, $N_1 \mid N=2 \sim H(10,5,2)$: $\mathbb{P}(N_1 = k \mid N=2) = \dfrac{\binom{5}{k}\binom{5}{2-k}}{\binom{10}{2}}$, soit
$\frac{10}{45}, \frac{25}{45}, \frac{10}{45}$ pour $k = 0, 1, 2$.

Réponse. $N \sim B(10, \frac{1}{6})$; $\mathbb{P}(N=0) \approx 0{,}162$, $\mathbb{P}(N \geq 2) \approx 0{,}515$; $N_1 \mid N=2$: $\frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{2}{9}$.

Correction de l'exercice 11 – Fonction génératrice d'un dé

a) $G_X(t) = \frac{1}{6}(t + t^2 + \ldots + t^6) = \frac{t}{6}(1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5)$, et

$$1 + t + \ldots + t^5 = (1+t)(1+t^2+t^4) = (1+t)(1+t+t^2)(1-t+t^2)$$

b) Par indépendance, $G_S = G_X^2 = \frac{t^2}{36}(1 + t + \ldots + t^5)^2$. Le coefficient de t^7 est $\frac{1}{36}\times$ le coefficient de t^5 dans $(1 + \ldots + t^5)^2$, qui vaut 6 : $\mathbb{P}(S=7) = \frac{6}{36}$.

c) On aurait $G_S = G_X G_Y$ avec $\frac{G_X(t)}{t}$ et $\frac{G_Y(t)}{t}$ polynômes réels de degré 5 (les faces 6 ont une probabilité non nulle, sinon 12 serait impossible) : chacun a au moins une racine réelle (degré impair). Mais $\frac{G_S(t)}{t^2} = \frac{1}{11}(1 + t + \ldots + t^{10})$ n'a pas de racine réelle (ses racines sont les racines 11^{e} de l'unité différentes de 1). Contradiction.

Réponse. $G_X = \frac{t}{6}(1+t)(1+t+t^2)(1-t+t^2)$; $\mathbb{P}(S=7) = \frac{1}{6}$; somme uniforme impossible.

Correction de l'exercice 12 – Parité d'une somme de variables de Bernoulli

a) $G_S(-1) = \sum_k \mathbb{P}(S=k)(-1)^k$: les termes pairs comptent $+1$, les impairs -1.

b) $G_S(-1) = (1-p-p)^n = (1-2p)^n$, et $\mathbb{P}(S \text{ pair}) + \mathbb{P}(S \text{ impair}) = 1$. Par demi-somme :

$$\mathbb{P}(S \text{ pair}) = \frac{1 + (1-2p)^n}{2}$$

c) $\dfrac{1 + 0{,}8^{10}}{2} \approx \dfrac{1 + 0{,}107}{2} \approx 0{,}554$.

Réponse. $G_S(-1) = (1-2p)^n$; $\mathbb{P}(S \text{ pair}) = \frac{1+(1-2p)^n}{2}$; c) $\approx 0{,}554$.

Correction de l'exercice 13 – Somme d'un dé et d'une pièce

a) Convolution : $\mathbb{P}(Z=1) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{12}$, $\mathbb{P}(Z=7) = \frac{1}{12}$, et pour $2 \leq z \leq 6$,
$\mathbb{P}(Z=z) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

b) Pour $w \leq 6$, $W = w$ si et seulement si $Y=0$ et $X=w$; pour $w \geq 7$, si et seulement si $Y=1$ et $X = w-6$. Dans tous les cas, $\mathbb{P}(W=w) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

c) $6Y$ a pour fonction génératrice $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t^6$; par indépendance :

$$G_W(t) = \frac{t + \ldots + t^6}{6} \times \frac{1 + t^6}{2} = \frac{t + t^2 + \ldots + t^{12}}{12}$$

Réponse. Z : $\frac{1}{12}$ en 1 et 7, $\frac{1}{6}$ de 2 à 6 ; W uniforme sur $[\![1, 12]\!]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 14 – Somme modulo n d'une uniforme et d'une variable quelconque

a) Pour w fixé, par les probabilités totales sur V et l'indépendance :

$$\mathbb{P}(U+V=w)=\sum_v \mathbb{P}(V=v)\,\mathbb{P}(U=w-v)=\sum_v \mathbb{P}(V=v)\frac{1}{n}=\frac{1}{n}$$

b) $\mathbb{P}(U+V=w, V=v)=\mathbb{P}(U=w-v)\mathbb{P}(V=v)=\frac{1}{n}\mathbb{P}(V=v)=\mathbb{P}(U+V=w)\mathbb{P}(V=v)$.

c) Couper à une position uniforme U revient à ajouter U (modulo 52) à la position de chaque carte ; la carte qui arrive au-dessus est celle de position initiale $-U$ modulo 52, uniforme, quel que soit l'ordre initial (même déterministe).

Réponse. $U+V$ uniforme et indépendante de V ; une coupe uniforme rend la carte du dessus uniforme.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : les dés de Sicherman

a) $G_A(t)=\frac{1}{6}(t+2t^2+2t^3+t^4)$ et $G_B(t)=\frac{1}{6}(t+t^3+t^4+t^5+t^6+t^8)$.

b) On factorise :

— $t+2t^2+2t^3+t^4=t(1+t)(1+t+t^2)$ (en effet $(1+t)(1+t+t^2)=1+2t+2t^2+t^3$) ;

— $t+t^3+t^4+t^5+t^6+t^8=t(1+t)(1+t+t^2)(1-t+t^2)^2$ (développer $(1+t)(1+t+t^2)=1+2t+2t^2+t^3$ et $(1-t+t^2)^2=1-2t+3t^2-2t^3+t^4$, puis multiplier).

$$G_AG_B=\frac{t^2}{36}(1+t)^2(1+t+t^2)^2(1-t+t^2)^2=\left(\frac{t}{6}(1+t+\ldots+t^5)\right)^2=G_X^2$$

c) Par indépendance, $G_{A+B}=G_AG_B=G_X^2=G_{X+X'}$; deux variables entières de même fonction génératrice ont la même loi (mêmes coefficients).

d) Somme 5 avec A, B : $(1,4)$, $(2,3)$ deux fois, $(3,\cdot)$: B n'a pas de 2 ; $(4,1)$. Soit $1+2+1=4$ couples sur 36 : $\frac{4}{36}$, comme pour deux dés ordinaires.

Réponse. $G_AG_B=G_X^2$: même loi de la somme que deux dés ordinaires ; $\mathbb{P}(5)=\frac{4}{36}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).