Plaquette 3 – Couples de variables : lois conjointes, marginales et conditionnelles

Variables aléatoires finies — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

La **loi conjointe** d'un couple (X, Y) se présente comme un tableau à double entrée des $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$. On en déduit les **lois marginales** en sommant les lignes ou les colonnes, les **lois conditionnelles** en divisant une ligne par son total, et la loi de toute fonction $g(X, Y)$ en regroupant les cases. Les marginales **ne déterminent pas** la loi conjointe, sauf si X et Y sont **indépendantes** : le tableau est alors le produit de ses marges. Pour prouver une dépendance, une seule case où l'égalité produit échoue suffit (souvent une case de probabilité nulle).

Exercice 1 – Lire un tableau de loi conjointe

Le couple (X, Y) a la loi suivante :

	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = 0$	0,1	0,2
$X = 1$	0,2	0,1
$X = 2$	0,3	0,1

a) Déterminer les lois marginales de X et de Y.

b) X et Y sont-elles indépendantes ?

c) Déterminer la loi de X sachant $Y = 1$.

d) Déterminer la loi de $S = X + Y$.

Exercice 2 – Deux tirages sans remise

Une urne contient trois jetons numérotés 1, 2, 3. On tire successivement deux jetons sans remise ; X est le premier numéro, Y le second.

a) Déterminer la loi conjointe de (X, Y).

b) Déterminer les lois marginales. Que remarque-t-on ?

c) X et Y sont-elles indépendantes ?

d) Déterminer la loi de $|X - Y|$.

Exercice 3 – Minimum et maximum de deux dés

On lance deux dés équilibrés indépendants de résultats D_1, D_2 ; $U = \min(D_1, D_2)$ et $V = \max(D_1, D_2)$.

a) Déterminer la loi conjointe de (U, V).

b) En déduire les lois de U et de V.

c) Calculer $\mathbb{P}(V = 6 \mid U = 1)$ et comparer à $\mathbb{P}(V = 6)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Loi conjointe de forme produit

Le couple (X, Y) à valeurs dans $[\![0, 2]\!]^2$ vérifie $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = c\, 2^i 3^j$.

a) Déterminer c.

b) Déterminer les lois marginales.

c) Montrer que X et Y sont indépendantes.

d) Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

Exercice 5 – Une somme modulo 3 indépendante

Soient X et Y indépendantes et uniformes sur $\{0, 1, 2\}$, et $Z = (X + Y) \bmod 3$.

a) Déterminer la loi conjointe de (X, Z).

b) Montrer que Z est uniforme et que X et Z sont indépendantes.

c) X, Y, Z sont-elles mutuellement indépendantes ?

d) Application : on chiffre un message X par une clé Y uniforme, $Z = X + Y \bmod 3$. Pourquoi ce chiffrement est-il parfait ?

Exercice 6 – Produit et maximum de variables de Bernoulli

Soient $X \sim B(p)$ et $Y \sim B(q)$ indépendantes.

a) Déterminer la loi conjointe de (X, Y).

b) Montrer que $XY \sim B(pq)$ et que $\max(X, Y) \sim B(1 - (1 - p)(1 - q))$.

c) Loi de $X + Y$? Est-ce une loi binomiale ?

d) Interpréter XY et $\max(X, Y)$ en termes d'événements.

Exercice 7 – Les marges ne déterminent pas la loi conjointe

On cherche les lois conjointes de couples (X, Y) à valeurs dans $\{0, 1\}^2$ dont les deux marginales sont $B\left(\frac{1}{2}\right)$.

a) On pose $t = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1)$. Exprimer les trois autres cases en fonction de t, et trouver les valeurs possibles de t.

b) Pour quelle valeur de t les variables sont-elles indépendantes ?

c) Interpréter les cas extrêmes $t = 0$ et $t = \frac{1}{2}$.

Exercice 8 – Lemme des coalitions

Soient X et Y deux variables finies indépendantes, f et g deux fonctions.

a) Montrer que $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes (écrire $\mathbb{P}(f(X) = a, g(Y) = b)$ comme une somme).

b) Application : X, Y indépendantes uniformes sur $[\![1, 6]\!]$. Montrer que « X est pair » et « $Y^2 > 10$ » sont indépendants.

c) $X + Y$ et $X - Y$ sont-elles indépendantes ? Le lemme s'applique-t-il ?

Exercice 9 – Succès parmi les premiers essais, sachant le total

On réalise n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p. X est le nombre total de succès, Y le nombre de succès parmi les m premières épreuves ($m \leq n$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Montrer que, sachant $X = k$, les $\binom{n}{k}$ positions possibles des succès sont équiprobables.

b) En déduire la loi de Y sachant $X = k$: c'est une loi hypergéométrique, indépendante de p.

c) Application : $n = 10$, $m = 4$, $k = 3$. Probabilité que les 4 premiers essais contiennent au moins un succès.

Exercice 10 – Amincissement d'une loi binomiale

n graines sont semées ; chacune germe avec probabilité p, puis, si elle a germé, la plante fleurit avec probabilité q, tout étant indépendant. X est le nombre de graines germées, Y le nombre de plantes fleuries.

a) Donner la loi de X et la loi de Y sachant $X = k$.

b) Montrer, par la formule des probabilités totales, que $\mathbb{P}(Y = j) = \binom{n}{j}(pq)^j(1-pq)^{n-j}$ (utiliser $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$).

c) Retrouver ce résultat directement.

Exercice 11 – Somme et différence de deux dés

X et Y sont les résultats de deux dés équilibrés indépendants ; $S = X + Y$ et $D = X - Y$.

a) Calculer $\mathbb{P}(S = 2, D = 0)$, $\mathbb{P}(S = 2)$, $\mathbb{P}(D = 0)$. Conclure sur l'indépendance.

b) Montrer que S et D ont toujours la même parité.

c) Déterminer la loi de D sachant $S = 7$.

Exercice 12 – Couple défini par une urne à trois couleurs

Une urne contient 2 boules blanches, 3 rouges et 5 vertes. On tire simultanément 3 boules ; X est le nombre de blanches, Y le nombre de rouges.

a) Déterminer la loi conjointe de (X, Y).

b) Déterminer la loi marginale de X et reconnaître une loi usuelle.

c) Déterminer la loi de Y sachant $X = 1$.

Exercice 13 – Loi du couple (premier succès, nombre de succès)

On lance 3 fois une pièce équilibrée. T est le rang du premier Pile ($T = 0$ s'il n'y en a pas) et N le nombre de Piles.

a) Déterminer la loi conjointe de (T, N) en listant les 8 issues.

b) En déduire les lois marginales.

c) Déterminer la loi de N sachant $T = 1$ et interpréter.

Exercice 14 – Indépendance : une seule case ne suffit pas

a) Soit (X, Y) à valeurs dans $\{0, 1\}^2$. Montrer que si $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1)$, alors l'égalité produit est vraie pour les trois autres cases, et X, Y sont indépendantes.

b) Soit (X, Y) à valeurs dans $\{0, 1, 2\}^2$, de loi conjointe :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$
$X=0$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	0
$X=1$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{2}{9}$
$X=2$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

Déterminer les marginales, vérifier l'égalité produit pour la case $(0,0)$, et conclure sur l'indépendance.

Exercice 15 – Synthèse : partage d'un secret en deux morceaux

Un secret $S \in \{0,1\}$ (de loi quelconque) est partagé entre deux personnes : on tire une clé $K \sim B\left(\frac{1}{2}\right)$ indépendante de S, la personne 1 reçoit K et la personne 2 reçoit $M = S \oplus K$ (addition modulo 2).

a) Déterminer la loi conjointe de (S, M) et montrer que M est indépendante de S.

b) Montrer que K est aussi indépendante de S : chaque personne, seule, n'apprend rien.

c) Montrer que les deux personnes réunies retrouvent S.

d) Les variables S, K, M sont-elles mutuellement indépendantes ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).