Plaquette 1 – Lois, fonction de répartition, lois usuelles et couples

Variables aléatoires finies — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

On détermine la **loi** d'une variable (support puis probabilités), on reconnaît une **loi usuelle**, on calcule la loi d'une fonction $g(X)$, et on manipule les **couples** : loi conjointe, lois marginales, indépendance.

Exercice 1 – Déterminer une loi

On lance deux dés équilibrés et on note X le **maximum** des deux résultats. Déterminer la loi de X.

Exercice 2 – Fonction de répartition

Soit X de loi $\mathbb{P}(X=0)=0{,}2$, $\mathbb{P}(X=1)=0{,}5$, $\mathbb{P}(X=2)=0{,}3$. Donner F_X et calculer $\mathbb{P}(0<X\leq 2)$.

Exercice 3 – Loi binomiale

Un QCM comporte 10 questions à 4 réponses dont une seule correcte. Un étudiant répond au hasard. Soit X le nombre de bonnes réponses.

a) Quelle est la loi de X ?

b) Probabilité d'avoir exactement 3 bonnes réponses ? Au moins 1 ?

Exercice 4 – Loi hypergéométrique

Une urne contient 12 boules dont 5 rouges. On tire 4 boules sans remise et on note X le nombre de rouges. Déterminer $\mathbb{P}(X=2)$.

Exercice 5 – Loi d'une fonction de X

Soit X uniforme sur $\{-2,-1,0,1,2\}$. Déterminer la loi de $Y=X^2$.

Exercice 6 – Loi conjointe

On lance deux dés. Soient X le résultat du premier et S la somme des deux.

Déterminer $\mathbb{P}(X=2,\,S=5)$ puis $\mathbb{P}(S=5)$. X et S sont-elles indépendantes ?

Exercice 7 – Lois marginales

La loi conjointe de (X,Y) est donnée par le tableau :

$\mathbb{P}$	$Y=0$	$Y=1$
$X=0$	0,1	0,2
$X=1$	0,3	0,4

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Déterminer les lois marginales et tester l'indépendance.

Exercice 8 – Somme de variables indépendantes

Soient $X \sim B(3\,;0{,}5)$ et $Y \sim B(2\,;0{,}5)$ indépendantes. Quelle est la loi de $X+Y$? Calculer $\mathbb{P}(X+Y=2)$.

Exercice 9 – Minimum de deux variables

Soient X et Y indépendantes, uniformes sur $\{1,2,3\}$. Déterminer la loi de $M=\min(X,Y)$.

Exercice 10 – Loi conditionnelle

On lance un dé ; si le résultat est k, on lance k pièces et on note X le nombre de piles. Calculer $\mathbb{P}(X=0)$.

Exercice 11 – Nombre de points fixes

On mélange au hasard 3 enveloppes et 3 lettres, et on note X le nombre de lettres arrivant au bon destinataire. Déterminer la loi de X.

Exercice 12 – Indicatrices d'événements

Pour un événement A, on note $\mathbf{1}_A$ la variable aléatoire qui vaut 1 si A est réalisé et 0 sinon.

a) Quelle est la loi de $\mathbf{1}_A$?

b) Montrer que $\mathbf{1}_{A\cap B}=\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$, $\mathbf{1}_{\overline{A}}=1-\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_{A\cup B}=\mathbf{1}_A+\mathbf{1}_B-\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$.

c) Soient $A_1,\dots,A_n$ des événements et $N=\sum_i \mathbf{1}_{A_i}$. Que compte N ? Exprimer l'événement $\{N=0\}$.

d) Si les A_i sont mutuellement indépendants et de même probabilité p, quelle est la loi de N ?

Exercice 13 – Le plus grand de deux numéros tirés sans remise

On tire simultanément deux jetons dans une urne contenant des jetons numérotés de 1 à n ($n \geq 2$). On note M le plus grand numéro obtenu.

a) Déterminer la loi de M.

b) Vérifier que la somme des probabilités vaut 1.

c) Calculer la fonction de répartition de M.

d) Application : $n=10$, probabilité que $M \geq 8$.

Exercice 14 – Transformer une loi uniforme

Soit X uniforme sur $[\![0,5]\!]$.

a) Déterminer la loi de $Y=2X-5$.

b) Déterminer la loi de $Z=X \bmod 2$ (reste de la division par 2) et de $T=X \bmod 4$.

c) Déterminer la loi de $U=(X-2)^2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Laquelle de ces variables est uniforme sur son ensemble de valeurs ?

Exercice 15 – Synthèse : contrôle qualité

Un lot de 20 pièces contient 3 défectueuses. On en prélève 5 au hasard sans remise ; le lot est refusé si le prélèvement contient au moins une pièce défectueuse.

a) Probabilité que le lot soit accepté ?

b) Combien de pièces faudrait-il prélever pour que le risque d’accepter à tort dépasse difficilement 30 % ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).