Plaquette 2 – Lois usuelles et lois de fonctions d'une variable

Variables aléatoires finies — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Déterminer la **loi** d'une variable X, c'est donner son ensemble de valeurs $X(\Omega)$ et, pour chaque valeur x, la probabilité $\mathbb{P}(X = x)$; on vérifie toujours que la somme vaut 1. On reconnaît une **loi usuelle** (uniforme, Bernoulli, binomiale, hypergéométrique) en identifiant le mécanisme : choix au hasard, nombre de succès d'épreuves indépendantes, nombre de succès d'un tirage sans remise. Pour la loi de $Y = f(X)$, on **regroupe les antécédents** : $\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{f(x) = y} \mathbb{P}(X = x)$. La **fonction de répartition** $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ permet de calculer des lois de maximum et de retrouver la loi par différences.

Exercice 1 – Mode d'une loi binomiale

Soit $X \sim B(10, 0{,}3)$.

a) Montrer que $\dfrac{\mathbb{P}(X = k+1)}{\mathbb{P}(X = k)} = \dfrac{(10-k) \times 0{,}3}{(k+1) \times 0{,}7}$.

b) En déduire la valeur la plus probable de X et la probabilité correspondante.

c) Généraliser : pour $X \sim B(n, p)$, montrer que le mode est $\lfloor (n+1)p \rfloor$ (si $(n+1)p$ n'est pas entier).

Exercice 2 – Symétrie de la loi binomiale

Soit $X \sim B(n, p)$, nombre de succès en n épreuves indépendantes.

a) Montrer que $Y = n - X$ suit la loi $B(n, 1-p)$: interprétation, puis calcul.

b) En déduire que si $p = \dfrac{1}{2}$, la loi de X est symétrique par rapport à $\dfrac{n}{2}$.

c) Application : on lance 7 pièces équilibrées. Calculer $\mathbb{P}(X \geq 4)$ sans calcul numérique.

Exercice 3 – Hypergéométrique ou binomiale ?

Une urne contient $N = 100$ boules dont $m = 20$ rouges. On en tire $n = 5$.

a) Tirage sans remise : loi du nombre X de rouges ; calculer $\mathbb{P}(X = 1)$.

b) Tirage avec remise : loi du nombre Y de rouges ; calculer $\mathbb{P}(Y = 1)$.

c) Justifier que, pour $N \to +\infty$ avec $\dfrac{m}{N} = p$ fixé, $\mathbb{P}(X = k) \to \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Exercice 4 – Rang du premier as

On retourne une à une les cartes d'un jeu de 52 cartes bien mélangé. T est le rang du premier as.

a) Montrer que $\mathbb{P}(T = k) = \dfrac{\binom{52-k}{3}}{\binom{52}{4}}$ pour $1 \leq k \leq 49$ (s'intéresser à l'ensemble des positions des 4 as).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Vérifier que la somme vaut 1 (crosse de hockey).

c) Calculer $\mathbb{P}(T = 1)$ et $\mathbb{P}(T > 10)$.

Exercice 5 – Écart entre deux dés

On lance deux dés équilibrés indépendants, de résultats X et Y, et l'on pose $D = |X - Y|$.

a) Déterminer la loi de D.

b) Quelle est la valeur la plus probable ?

c) Calculer $\mathbb{P}(D \leq 1)$.

Exercice 6 – Nombre de faces différentes

On lance trois dés équilibrés ; N est le nombre de valeurs distinctes obtenues.

a) Calculer $\mathbb{P}(N = 1)$ et $\mathbb{P}(N = 3)$.

b) En déduire $\mathbb{P}(N = 2)$, puis le vérifier par un dénombrement direct.

c) Généraliser : pour n dés, quelle est la probabilité que toutes les faces soient différentes ? Pour quels n est-elle nulle ?

Exercice 7 – Retrouver la loi à partir de la fonction de répartition

Une variable X à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ a pour fonction de répartition $F(k) = \left(\frac{k}{n}\right)^2$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.

a) Vérifier que F convient ($F(0) = 0$, $F(n) = 1$, croissante).

b) En déduire la loi de X.

c) Interpréter : X est le maximum de deux tirages indépendants uniformes dans $[\![1, n]\!]$.

d) Même question avec $F(k) = 1 - \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2$.

Exercice 8 – Première boule blanche sans remise

Une urne contient N boules dont $b \geq 1$ blanches. On tire les boules une à une sans remise ; T est le rang de la première blanche.

a) Montrer que $\mathbb{P}(T = k) = \dfrac{\binom{N-k}{b-1}}{\binom{N}{b}}$ pour $1 \leq k \leq N - b + 1$.

b) Application : $N = 5$, $b = 2$. Donner la loi de T.

c) Retrouver $\mathbb{P}(T = 2)$ par la formule des probabilités composées.

Exercice 9 – Carré d'une variable uniforme centrée

Soit X uniforme sur $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

a) Déterminer la loi de X^2 et de $|X|$.

b) Déterminer la loi de $Y = X^2 - 2|X|$.

c) La loi de X est symétrique (X et $-X$ ont même loi). Montrer que X^3 et $-X^3$ aussi.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Loi conditionnelle d'une uniforme

Soit X uniforme sur $[\![1, n]\!]$ et $m \in [\![1, n]\!]$.

a) Déterminer la loi de X sachant $X \leq m$.

b) Déterminer la loi de $X - m$ sachant $X > m$.

c) Application : on tire un numéro de 1 à 100. Sachant qu'il est pair, quelle est la loi de $\frac{X}{2}$?

Exercice 11 – Tronquer une variable binomiale

Soit $X \sim B\left(5, \frac{1}{2}\right)$ et $Y = \min(X, 3)$.

a) Donner la loi de X.

b) En déduire la loi de Y.

c) Donner les fonctions de répartition de X et de Y et comparer.

d) Interprétation : un parking de 3 places, 5 voitures arrivant chacune avec probabilité $\frac{1}{2}$. Que représente Y ?

Exercice 12 – Somme de deux dés et fonction de répartition

Soit S la somme de deux dés équilibrés indépendants.

a) Rappeler la loi de S.

b) Calculer $F_S(k)$ pour $k \leq 7$ et montrer que $F_S(k) = \frac{(k-1)k}{72}$ pour $2 \leq k \leq 7$.

c) Calculer $\mathbb{P}(4 \leq S \leq 9)$ à l'aide de F_S.

d) Justifier que $\mathbb{P}(S \leq k) = \mathbb{P}(S \geq 14 - k)$.

Exercice 13 – Nombre de succès avant l'échec

On lance une pièce qui donne Pile avec probabilité $p \in]0, 1[$, au plus n fois, et l'on s'arrête au premier Face. X est le nombre de Piles obtenus.

a) Déterminer la loi de X (valeurs $0, \ldots, n$).

b) Vérifier que la somme vaut 1.

c) Calculer $\mathbb{P}(X \geq k)$ pour $0 \leq k \leq n$.

Exercice 14 – Nombre de points fixes pour n = 4

Soit σ une permutation aléatoire uniforme de $[\![1, 4]\!]$ et F son nombre de points fixes.

a) Montrer que $\mathbb{P}(F = k) = \frac{\binom{4}{k} D_{4-k}}{24}$, où D_m est le nombre de dérangements de m éléments ($D_0 = 1$, $D_1 = 0$, $D_2 = 1$, $D_3 = 2$, $D_4 = 9$).

b) En déduire la loi de F et vérifier la somme.

c) Pourquoi $\mathbb{P}(F = 3) = 0$?

Exercice 15 – Synthèse : trois modèles pour un même tirage

Une urne contient 3 boules blanches et 2 noires. On tire 3 boules et l'on note X le nombre de blanches.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Tirage simultané : loi de X.

b) Tirage successif sans remise : retrouver la loi de X par l'arbre ou les probabilités composées, et vérifier que c'est la même.

c) Tirage avec remise : loi de X.

d) Comparer les deux lois (valeurs possibles, mode) et commenter.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).