Plaquette 5 – Modéliser avec des variables aléatoires

Variables aléatoires finies — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Pour étudier une grandeur aléatoire (un gain, un nombre d'erreurs, un rang, un coût), on l'exprime à partir de variables **simples** dont on connaît la loi : indicatrices, variables de Bernoulli indépendantes, variable uniforme, binomiale. On obtient alors sa loi par regroupement, convolution ou fonction génératrice. Les **indicatrices** sont l'outil clé : une variable de comptage est une somme d'indicatrices, et si celles-ci sont indépendantes et de même paramètre, on reconnaît une loi binomiale. On confronte enfin le modèle à l'intuition (et, si possible, à une simulation).

Exercice 1 – Boîtes vides

On lance au hasard 3 boules dans 3 boîtes (chaque boule choisit sa boîte uniformément, indépendamment). V est le nombre de boîtes vides.

a) Quelles valeurs V peut-il prendre ?

b) Déterminer la loi de V en comptant les applications.

c) Écrire $V = \mathbf{1}_{A_1} + \mathbf{1}_{A_2} + \mathbf{1}_{A_3}$ où A_j : « la boîte j est vide ». Calculer $\mathbb{P}(A_j)$. Les A_j sont-ils indépendants ?

Exercice 2 – Nombre de records

On range au hasard n valeurs distinctes (permutation uniforme). La position i est un **record** si la valeur en position i est plus grande que toutes les précédentes (la position 1 est toujours un record). On note R le nombre de records.

a) Montrer que la position i est un record avec probabilité $\frac{1}{i}$.

b) On admet que les indicatrices de records $I_1, \dots, I_n$ sont indépendantes. En déduire $G_R(t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{t+i-1}{i}$.

c) Donner la loi de R pour $n = 4$ et vérifier par une énumération partielle ($R = 4$ et $R = 1$).

Exercice 3 – Nombre de séries dans une suite de pile ou face

On lance n fois une pièce équilibrée. Une **série** est un bloc maximal de résultats identiques consécutifs (par exemple *PPFPPP* comporte 3 séries). On note R le nombre de séries.

a) Écrire $R = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} C_i$, où C_i vaut 1 si les lancers i et $i+1$ diffèrent.

b) Montrer que $C_i \sim B\left(\frac{1}{2}\right)$ et admettre que les C_i sont indépendantes. En déduire la loi de R.

c) Pour $n = 10$, quelle est la probabilité d'avoir au plus 3 séries ? Commenter l'usage de ce nombre pour détecter des suites « trop régulières » ou « pas assez aléatoires ».

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Attendre deux succès

Un enquêteur appelle des personnes au hasard ; chacune accepte de répondre avec probabilité p, indépendamment. Il s'arrête dès qu'il a obtenu 2 réponses, ou après n appels. T est le rang du deuxième succès ($T = 0$ s'il n'y en a pas eu deux).

a) Montrer que $\mathbb{P}(T = k) = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}$ pour $2 \leq k \leq n$.

b) Application : $p = 0{,}3$, $n = 6$. Calculer $\mathbb{P}(T \leq 4)$ et $\mathbb{P}(T = 0)$.

c) Retrouver $\mathbb{P}(T = 0)$ avec une loi binomiale.

Exercice 5 – Gains à la roulette

À la roulette européenne, 18 cases sur 37 sont rouges. Une mise de 1 € sur « rouge » rapporte +1 € si le rouge sort, −1 € sinon. On joue 3 fois, indépendamment.

a) Exprimer le gain total G en fonction du nombre B de rouges et donner la loi de G.

b) Probabilité de finir en gain ?

c) Comparer avec un jeu équitable ($p = \frac{1}{2}$).

Exercice 6 – Simuler une loi par inversion

On veut simuler en Python une variable X de loi $\mathbb{P}(X = 1) = 0{,}2$, $\mathbb{P}(X = 2) = 0{,}5$, $\mathbb{P}(X = 3) = 0{,}3$, à partir de *random()*, qui renvoie un réel uniforme dans $[0, 1[$.

```
from random import random

def simule():
    u = random()
    if u < 0.2:
        return 1
    elif u < 0.7:
        return 2
    else:
        return 3
```

a) Justifier que la fonction renvoie 2 avec probabilité 0,5 (on admet $\mathbb{P}(a \leq U < b) = b - a$ pour U uniforme sur $[0, 1[$).

b) Relier les seuils 0,2 et 0,7 à la fonction de répartition de X.

c) Écrire une fonction qui simule une loi binomiale $B(n, p)$ en additionnant des variables de Bernoulli.

Exercice 7 – Retransmissions sur un réseau

Un paquet réseau est perdu avec probabilité $\ell = 0{,}1$ à chaque envoi, indépendamment. On le renvoie jusqu'à réception, au plus 4 envois. N est le nombre d'envois effectués.

a) Donner la loi de N (valeurs 1 à 4).

b) Quelle est la probabilité que le paquet ne soit jamais reçu ?

c) Combien d'envois maximum faut-il autoriser pour que la probabilité de perte définitive soit inférieure à 10^{-6} ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Position d'une carte donnée

On mélange un jeu de 52 cartes (permutation uniforme). P est la position de l'as de pique.

a) Montrer que P est uniforme sur $[\![1, 52]\!]$.

b) Soit Q la position de l'as de cœur. Déterminer la loi conjointe de (P, Q) et la loi de $|P - Q|$.

c) Quelle est la probabilité que les deux as soient voisins ?

Exercice 9 – Transfert entre deux urnes

L'urne U_1 contient 2 blanches et 1 noire, l'urne U_2 contient 1 blanche et 2 noires. On tire une boule de U_1 et on la place dans U_2, puis on tire une boule de U_2. X vaut 1 si la boule transférée est blanche, Y vaut 1 si la boule tirée de U_2 est blanche.

a) Déterminer la loi conjointe de (X, Y).

b) En déduire la loi de Y.

c) Calculer $\mathbb{P}(X = 1 \mid Y = 1)$.

Exercice 10 – Coût de production

Une série de 5 pièces coûte 100 € de fabrication ; chaque pièce est défectueuse avec probabilité 0,1, indépendamment, et chaque pièce défectueuse coûte 20 € de reprise. C est le coût total.

a) Exprimer C en fonction du nombre X de pièces défectueuses et donner la loi de C.

b) Calculer $\mathbb{P}(C > 130)$.

c) Le client exige une série sans défaut. Quelle est la probabilité de devoir fabriquer une seconde série ?

Exercice 11 – Boules noires restantes

Une urne contient 3 boules blanches et 2 noires. On tire les boules une à une sans remise jusqu'à avoir sorti toutes les blanches. R est le nombre de boules noires restant alors dans l'urne.

a) Justifier que l'ordre des 5 boules est une permutation uniforme, et que les positions des 2 noires forment une partie uniforme de $[\![1, 5]\!]$.

b) Déterminer la loi de R.

c) Généraliser : b blanches, 2 noires.

Exercice 12 – Code à répétition

Pour transmettre un bit sur un canal qui inverse chaque bit avec probabilité p (indépendamment), on l'envoie 3 fois et l'on décode par la majorité. E est le nombre de bits inversés.

a) Loi de E ?

b) Le décodage est faux si et seulement si $E \geq 2$. Calculer la probabilité d'erreur $\varepsilon(p)$.

c) Pour $p = 0{,}1$, comparer $\varepsilon(p)$ et p. Pour quelles valeurs de p le code améliore-t-il la transmission ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 13 – Sondage électoral

Dans une grande ville, 52 % des électeurs votent pour A. On interroge n électeurs pris au hasard (modèle avec remise). X est le nombre d'intentions de vote pour A.

a) Loi de X ?

b) Pour $n = 5$, probabilité que le sondage donne A minoritaire ($X \leq 2$) ?

c) Pour $n = 1$ et $n = 3$, même question. Commenter l'effet de la taille de l'échantillon.

Exercice 14 – Lancers jusqu'au premier six (tronqués)

On lance un dé au plus n fois, en s'arrêtant au premier 6. L est le nombre de lancers effectués.

a) Déterminer la loi de L.

b) Calculer $\mathbb{P}(L = n)$ et l'interpréter.

c) Pour $n = 10$, calculer $\mathbb{P}(L \leq 3)$ et $\mathbb{P}(L = 10)$.

Exercice 15 – Synthèse : un QCM noté avec pénalité

Un QCM comporte 4 questions à 4 réponses possibles ; une bonne réponse rapporte 1 point, une mauvaise en retire $\frac{1}{4}$. Un candidat répond au hasard à toutes les questions. B est le nombre de bonnes réponses et N la note.

a) Loi de B ; exprimer N en fonction de B.

b) Loi de N.

c) Probabilité d'obtenir une note positive ou nulle ? au moins 2 ?

d) Un candidat élimine une mauvaise réponse sur chaque question avant de choisir au hasard parmi les 3 restantes. Même question qu'en c) pour « au moins 2 ».

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).