Plaquette 4 – Sommes, maximums et fonctions génératrices de variables indépendantes

Variables aléatoires finies — Prépa MPSI / MP2I (1re année)

Exercices

Méthode

Pour la loi d'une **somme** $X+Y$ de variables indépendantes, on décompose l'événement $\{X+Y=s\}$ selon la valeur de X : c'est la **formule de convolution**. Pour un **maximum** ou un **minimum**, on passe par la fonction de répartition : $\{\max \leq k\}$ et $\{\min > k\}$ sont des intersections, dont la probabilité est un produit. Enfin, la **fonction génératrice** $G_X(t)=\sum_k \mathbb{P}(X=k)t^k$ transforme la convolution en **produit de polynômes** : c'est l'outil le plus efficace pour les sommes de variables à valeurs entières.

Exercice 1 – Convolution : la somme de deux dés

Soient X, Y indépendantes et uniformes sur $[\![1,6]\!]$.

a) Écrire la formule de convolution pour $\mathbb{P}(X+Y=s)$ et préciser les bornes de la somme.

b) En déduire $\mathbb{P}(X+Y=s)=\dfrac{6-|s-7|}{36}$.

c) Généraliser à deux variables uniformes sur $[\![1,n]\!]$.

Exercice 2 – Stabilité de la loi binomiale

Soient $X\sim B(n,p)$ et $Y\sim B(m,p)$ indépendantes.

a) Par la formule de convolution et l'identité de Vandermonde, montrer que $X+Y\sim B(n+m,p)$.

b) Retrouver ce résultat par une interprétation en épreuves de Bernoulli.

c) Retrouver ce résultat avec les fonctions génératrices.

Exercice 3 – Somme de binomiales de paramètres différents

Soient $X\sim B\left(\frac{1}{2}\right)$ et $Y\sim B\left(\frac{1}{4}\right)$ indépendantes.

a) Déterminer la loi de $S=X+Y$.

b) Montrer que S ne suit pas une loi binomiale.

c) Écrire G_S et la factoriser.

Exercice 4 – Somme de deux uniformes et loi triangulaire

Soient X, Y indépendantes et uniformes sur $[\![0,n-1]\!]$.

a) Déterminer la loi de $S=X+Y$.

b) Déterminer la loi de $R=(X+Y) \bmod n$.

c) Application : deux roues de loterie numérotées de 0 à 9. Probabilité que la somme soit 9 ? que le chiffre des unités de la somme soit 9 ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Maximum de n variables uniformes

Soient $X_1, \dots, X_n$ indépendantes et uniformes sur $[\![1, N]\!]$, et $M = \max(X_1, \dots, X_n)$.

a) Calculer $\mathbb{P}(M \leq k)$ puis $\mathbb{P}(M = k)$.

b) Application : on lance 4 dés. Probabilité que le plus grand soit 6 ? soit au plus 3 ?

c) Montrer que, pour N fixé, $\mathbb{P}(M = N) \to 1$ quand $n \to +\infty$. Interpréter.

Exercice 6 – Minimum de variables indépendantes

Trois composants ont des durées de vie (en années entières) indépendantes X_1, X_2, X_3 avec $\mathbb{P}(X_i > k) = 0{,}8^k$ pour $k \in [\![0, 10]\!]$ (et le composant est remplacé au bout de 10 ans).

a) Le système est en série : il tombe en panne dès qu'un composant lâche. Sa durée de vie est $T = \min(X_1, X_2, X_3)$. Calculer $\mathbb{P}(T > k)$.

b) En déduire $\mathbb{P}(T = k)$ pour $1 \leq k \leq 10$ (avec $\mathbb{P}(X_i = k) = \mathbb{P}(X_i > k-1) - \mathbb{P}(X_i > k)$).

c) Probabilité que le système dure plus de 2 ans ? Et un seul composant ?

Exercice 7 – Le collectionneur de vignettes

Il existe 3 vignettes différentes ; chaque achat donne l'une d'elles, uniformément et indépendamment. On achète n vignettes.

a) Quelle est la probabilité d'avoir la collection complète après n achats ? (Utiliser le nombre de surjections.)

b) Calculer pour $n = 3, 4, 5$.

c) À partir de combien d'achats cette probabilité dépasse-t-elle 0,9 ?

Exercice 8 – Marche aléatoire sur une droite

Un pion part de 0 et fait n pas indépendants, $+1$ ou -1 avec probabilité $\frac{1}{2}$. On note S_n sa position.

a) Écrire $S_n = 2B - n$ où B compte les pas $+1$; loi de B, puis de S_n.

b) Quelles valeurs S_n peut-il prendre ? Calculer $\mathbb{P}(S_4 = 0)$ et $\mathbb{P}(S_4 = 2)$.

c) Calculer $\mathbb{P}(|S_{10}| \geq 6)$.

Exercice 9 – Loi d'une variable sachant la somme

Soient $X \sim B(n, p)$ et $Y \sim B(m, p)$ indépendantes.

a) Calculer $\mathbb{P}(X = k \mid X + Y = s)$.

b) Montrer que c'est une loi hypergéométrique, qui ne dépend pas de p.

c) Interprétation : deux ateliers de n et m machines, chaque machine tombant en panne avec probabilité p. On sait que s machines sont en panne au total ; quelle est la loi du nombre de pannes dans le premier atelier ?

Exercice 10 – Nombre total de six

On lance 5 fois une paire de dés. N est le nombre total de 6 obtenus (sur les 10 dés).

a) Quelle est la loi de N ? Justifier par la stabilité des lois binomiales.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Calculer $\mathbb{P}(N = 0)$ et $\mathbb{P}(N \geq 2)$.

c) N_1 est le nombre de 6 sur le premier dé de chaque paire et N_2 sur le second. Loi de N_1 sachant $N = 2$?

Exercice 11 – Fonction génératrice d'un dé

Soit X le résultat d'un dé équilibré.

a) Écrire $G_X(t)$ et le factoriser sous la forme $\frac{t}{6}(1+t)(1+t+t^2)(1-t+t^2)$.

b) En déduire G_S pour la somme S de deux dés et retrouver $\mathbb{P}(S = 7)$.

c) Pourquoi ne peut-on pas « truquer » deux dés (à faces 1 à 6, de lois quelconques p_i, q_j) pour que la somme soit uniforme sur $[\![2, 12]\!]$? (Admettre qu'alors $G_S(t) = \frac{t^2}{11} \cdot \frac{1-t^{11}}{1-t}$ n'a pas de racine réelle, alors que G_X et G_Y, de degré impair 5 après division par t, en ont.)

Exercice 12 – Parité d'une somme de variables de Bernoulli

Soient $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes de loi $B(p)$ et $S = X_1 + \ldots + X_n$.

a) Montrer que $G_S(-1) = \mathbb{P}(S \text{ pair}) - \mathbb{P}(S \text{ impair})$.

b) En déduire $\mathbb{P}(S \text{ pair}) = \frac{1 + (1-2p)^n}{2}$.

c) Application : 10 bits indépendants valant 1 avec probabilité 0,1. Probabilité que la somme de contrôle (parité) soit paire ?

Exercice 13 – Somme d'un dé et d'une pièce

X est le résultat d'un dé équilibré et Y, indépendant, vaut 1 (Pile) ou 0 (Face) avec probabilité $\frac{1}{2}$. On pose $Z = X + Y$ et $W = X + 6Y$.

a) Déterminer la loi de Z.

b) Montrer que W est uniforme sur $[\![1, 12]\!]$.

c) Écrire G_W en fonction de G_X et G_Y et vérifier b).

Exercice 14 – Somme modulo n d'une uniforme et d'une variable quelconque

Soit U uniforme sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et V une variable à valeurs dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, de loi quelconque, indépendante de U.

a) Montrer que $U + V$ est uniforme.

b) Montrer que $U + V$ et V sont indépendantes.

c) Application : on mélange un jeu de 52 cartes en coupant à une position uniforme. Pourquoi la carte du dessus est-elle uniforme, quel que soit l'ordre initial ?

Exercice 15 – Synthèse : les dés de Sicherman

Un dé A porte les faces $1, 2, 2, 3, 3, 4$ et un dé B les faces $1, 3, 4, 5, 6, 8$ (chaque face équiprobable).

a) Écrire G_A et G_B.

b) En utilisant $1 + t + \ldots + t^5 = (1+t)(1+t+t^2)(1-t+t^2)$, montrer que $G_A G_B = G_X^2$, où X est un dé ordinaire.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) En déduire que la somme des dés A et B (indépendants) a la même loi que la somme de deux dés ordinaires.

d) Vérifier sur $\mathbb{P}(\text{somme} = 5)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).