

Plaquette 1 - Écrire et réduire une expression

Calcul littéral — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Simplifier les écritures. Le signe $\times$ disparaît devant une lettre ou une parenthèse :

$$3 \times a = 3a \quad a \times b = ab \quad a \times a = a^2 \quad 1 \times x = x$$

On écrit toujours le nombre **avant** la lettre : $3a$ et non $a3$.

Termes semblables. Deux termes sont semblables lorsqu'ils ont exactement la même partie littérale : $5x$ et $-2x$ le sont, $5x$ et $5x^2$ ne le sont pas.

Réduire, c'est ajouter les coefficients des termes semblables :

$$ax + bx = (a + b)x$$

Supprimer une parenthèse.

Devant la parenthèse	Effet
un +	les signes intérieurs sont conservés
un -	tous les signes intérieurs changent

$$A + (B - C) = A + B - C \quad A - (B - C) = A - B + C$$

Produit de deux termes. On multiplie les nombres entre eux et les lettres entre elles :

$$3x \times 4x = 12x^2 \quad 2a \times 5b = 10ab$$

Le test qui valide tout. Une réduction correcte donne la même valeur que l'expression de départ **pour n'importe quelle valeur** de la lettre : il suffit d'en tester une pour repérer une erreur.

Correction de l'exercice 1 - Simplifier les écritures

Les conventions d'écriture.

$$3 \times a = 3a \quad a \times a = a^2 \quad 1 \times x = x$$

a) $4 \times x = 4x$: le signe $\times$ disparaît et le nombre se place devant la lettre.

b) $y \times y = y^2$: un facteur répété s'écrit avec un exposant.

c) $1 \times t + 3 \times t = t + 3t = 4t$: le coefficient 1 ne s'écrit pas, puis on ajoute les coefficients 1 et 3.

d) $5 \times a \times 2 \times b = 5 \times 2 \times a \times b = 10ab$: on regroupe d'abord les nombres, ce qui est permis car le produit ne dépend pas de l'ordre des facteurs.

L'erreur classique en d). Écrire $5a \times 2b = 10ab$ est correct, mais écrire $7ab$ ne l'est pas : on **multiplie** les coefficients, on ne les additionne pas. Test avec $a = 1$ et $b = 1$: l'expression vaut $5 \times 1 \times 2 \times 1 = 10$, ce que donne bien $10ab$.

Réponse. a) $4x$ — b) y^2 — c) $4t$ — d) $10ab$.

Correction de l'exercice 2 - Regrouper les termes semblables

La règle. On n'additionne que des termes ayant la même partie littérale :

$$ax + bx = (a + b)x$$

a) $7x + 3x - 2x = (7 + 3 - 2)x = 8x$.

b) On regroupe séparément les termes en a et les nombres : $(5a - 2a) + (4 + 9) = 3a + 13$. On ne peut pas aller plus loin : $3a$ et 13 ne sont pas semblables.

c) $6y - y = 5y$ (attention, $-y$ vaut $-1y$) et $3 - 8 = -5$, d'où $5y - 5$.

d) Deux lettres différentes, donc deux regroupements : $(2m - 7m) + (5n + n) = -5m + 6n$.

Ce qu'il ne faut jamais faire. Écrire $3a + 13 = 16a$: a vaut ce qu'il veut, et pour $a = 2$ l'expression vaut $3 \times 2 + 13 = 19$, alors que $16a$ vaudrait 32 . Un seul test numérique suffit à démasquer l'erreur.

Réponse. a) $8x$ — b) $3a + 13$ — c) $5y - 5$ — d) $-5m + 6n$.

Correction de l'exercice 3 - Des carrés et des simples

Le point clé. x et x^2 ne sont **pas** des termes semblables : ils ne se regroupent jamais. Pour $x = 3$, le premier vaut 3 et le second 9 .

a) Termes en x^2 : $3x^2 - x^2 = 2x^2$. Termes en x : $5x + 2x = 7x$. D'où

$$3x^2 + 5x - x^2 + 2x = 2x^2 + 7x$$

b) $4y^2 - 7y^2 = -3y^2$, et le terme y reste seul : $-3y^2 + y$.

c) Termes en a^2 : $a^2 + a^2 = 2a^2$. Termes en a : $a - 3a = -2a$. Le nombre 1 reste : $2a^2 - 2a + 1$.

Le contrôle numérique. Pour $a = 2$, l'expression de départ vaut $4 + 2 + 4 - 6 + 1 = 5$, et la forme réduite $2 \times 4 - 2 \times 2 + 1 = 8 - 4 + 1 = 5$ ✓ Les deux écritures désignent bien le même nombre.

La bonne présentation. On range les termes par degré décroissant — d'abord les x^2 , puis les x , puis le nombre — ce qui rend les comparaisons immédiates.

Réponse. a) $2x^2 + 7x$ — b) $-3y^2 + y$ — c) $2a^2 - 2a + 1$.

Correction de l'exercice 4 - Supprimer les parenthèses

La règle du cours.

$$A + (B - C) = A + B - C \quad A - (B - C) = A - B + C$$

Un $+$ devant la parenthèse laisse les signes tels quels ; un $-$ les inverse **tous**.

a) $5x + (3x - 4) = 5x + 3x - 4 = 8x - 4$.

b) Le $-$ change les deux signes : $7a - 2a - 5 = 5a - 5$.

c) La première parenthèse est précédée de rien (donc d'un $+$ implicite), la seconde d'un $-$:

$$(4y - 1) - (y - 6) = 4y - 1 - y + 6 = 3y + 5$$

L'erreur la plus fréquente consiste à n'inverser que le premier signe :

$4y - 1 - y - 6 = 3y - 7$. Test avec $y = 1$: l'expression de départ vaut

$(4 - 1) - (1 - 6) = 3 - (-5) = 8$, et $3y + 5 = 8$ ✓ tandis que $3y - 7 = -4$ ✗

Le réflexe. Après chaque suppression de parenthèse précédée d'un moins, relire la ligne en vérifiant que **tous** les signes ont changé.

Réponse. a) $8x - 4$ — b) $5a - 5$ — c) $3y + 5$.

Correction de l'exercice 5 - Produits de termes

La règle. On multiplie les nombres entre eux, puis les lettres entre elles :

$$3x \times 4x = (3 \times 4) \times (x \times x) = 12x^2$$

a) $3x \times 5x = 15x^2$.

b) $-4a \times 2a = -8a^2$: un facteur négatif et un positif donnent un produit négatif.

c) $6m \times 3n = 18mn$: les lettres étant différentes, elles restent côte à côte, sans exposant.

d) $x \times x \times x = x^3$.

Ne pas confondre somme et produit. $3x + 5x = 8x$ mais $3x \times 5x = 15x^2$: l'addition garde la lettre au degré 1, le produit l'élève au carré. Test avec $x = 2$: la somme vaut $6 + 10 = 16 = 8 \times 2$ ✓ et le produit $6 \times 10 = 60 = 15 \times 4$ ✓

En b), attention aussi au signe. Oublier le moins change complètement l'expression : pour $a = 1$, on trouverait 8 au lieu de -8 .

Réponse. a) $15x^2$ — b) $-8a^2$ — c) $18mn$ — d) x^3 .

Correction de l'exercice 6 - Le périmètre du rectangle

a) Le périmètre d'un rectangle est deux fois la somme de la longueur et de la largeur :

$$P = 2 \times (L + l) = 2 \times ((x + 3) + x)$$

On réduit d'abord la parenthèse : $(x + 3) + x = 2x + 3$. Donc

$$P = 2 \times (2x + 3) = 4x + 6$$

b) Pour $x = 5$: $P = 4 \times 5 + 6 = 26$ cm. Contrôle direct : longueur 8 cm, largeur 5 cm, périmètre $2 \times (8 + 5) = 26$ cm ✓

c) On cherche x tel que $4x + 6 = 34$, donc $4x = 28$ et $x = 7$. Vérification : longueur 10 cm, largeur 7 cm, périmètre $2 \times 17 = 34$ cm ✓

Pourquoi l'expression littérale est utile. Elle donne le périmètre pour **toutes** les valeurs de x d'un coup : une seule formule remplace une infinité de calculs, et permet de remonter de la valeur du périmètre à celle de x .

Réponse. a) $P = 4x + 6$ — b) 26 cm — c) $x = 7$ cm.

Correction de l'exercice 7 - L'erreur de Noah

a) Pour $x = 4$: $3x + 2 = 3 \times 4 + 2 = 14$, alors que $5x = 5 \times 4 = 20$. Les deux expressions ne coïncident pas : l'égalité de Noah est fausse.

b) Il a additionné 3 et 2, mais ces deux nombres ne jouent pas le même rôle : 3 est le **coefficient** de x , tandis que 2 est un terme constant. Or on ne regroupe que des termes semblables :

$$ax + bx = (a + b)x$$

Ici le second terme n'a pas de x : il n'y a rien à regrouper, et $3x + 2$ est déjà réduit.

c) On cherche x tel que $3x + 2 = 5x$, soit $2 = 2x$, donc $x = 1$. Vérification : $3 + 2 = 5$ et $5 \times 1 = 5$ ✓

Ce que le cas c) apprend. Deux expressions peuvent coïncider pour **une** valeur particulière sans être égales en général. Un test numérique unique ne prouve donc pas qu'une réduction est juste ; en revanche, un seul test qui échoue prouve qu'elle est fausse.

Réponse. a) 14 contre 20 — b) $3x$ et 2 ne sont pas semblables — c) seulement pour $x = 1$.

Correction de l'exercice 8 - Traduire un énoncé

a) Le double est $2x$, augmenté de 7 : $2x + 7$.

b) « Diminué de 5 » donne $x - 5$; « puis multiplié par 3 » impose une parenthèse :

$$3(x - 5) = 3x - 15$$

c) Le triple du nombre est $3x$, donc la somme vaut $x + 3x = 4x$.

d) Le carré est x^2 , diminué du nombre : $x^2 - x$. On ne peut pas réduire davantage, x^2 et x n'étant pas semblables.

Le piège de la question b). Sans parenthèse, on écrirait $3x - 5$, ce qui signifie « le triple du nombre, diminué de 5 » : ce n'est pas la même chose. Test avec $x = 10$: la phrase donne $(10 - 5) \times 3 = 15$, tandis que $3x - 5 = 25$. L'ordre des opérations dans la phrase décide de la place des parenthèses.

Le réflexe. Repérer le mot « puis » : il signale qu'une opération s'applique à **tout** ce qui précède, donc une parenthèse.

Réponse. a) $2x + 7$ — b) $3x - 15$ — c) $4x$ — d) $x^2 - x$.

Correction de l'exercice 9 - Deux expressions sont-elles égales ?

A et B. On réduit A : $4x - x + 2 = 3x + 2$. C'est exactement B : les deux expressions sont **égales pour toute valeur** de x .

C et D. On développe D en distribuant le facteur 2 :

$$2(x + 3) = 2 \times x + 2 \times 3 = 2x + 6$$

C'est exactement C : elles sont égales elles aussi.

E et F. Testons $x = 3$: $E = 9 + 3 = 12$ et $F = 6$. Un seul contre-exemple suffit : elles **ne sont pas** égales. Elles coïncident seulement pour certaines valeurs, ici $x = 0$ et $x = 1$.

La différence entre les deux situations. Prouver l'égalité demande un calcul littéral valable pour tout x ; prouver la non-égalité demande un seul contre-exemple numérique. C'est une asymétrie qu'on retrouvera dans toute la suite du programme : un exemple ne démontre rien, un contre-exemple réfute tout.

Réponse. $A = B$ et $C = D$ pour tout x ; $E \neq F$ (contre-exemple $x = 3$).

Correction de l'exercice 10 - Le terme manquant

Le principe. On compare les termes semblables de chaque côté :

$$ax + bx = (a + b)x$$

a) Il manque un terme en x tel que $5 + \dots = 9$, donc $4x$.

b) Le terme retranché doit valoir 3 : la réponse est 3.

c) Les termes constants sont déjà identiques (-4 des deux côtés). Côté x : $\dots + 2x = 6x$, donc il manque $4x$.

d) Les termes en x^2 coïncident, il manque donc $-5x$.

La vérification indispensable. On teste une valeur, par exemple $x = 2$ en c) : l'expression complétée vaut $8 + 4 - 4 = 8$, et le second membre $12 - 4 = 8$ ✓

Pourquoi « quelle que soit la valeur de x ». Sans cette précision, on pourrait compléter n'importe comment et ajuster ensuite : c'est l'exigence que l'égalité tienne pour **tout** x qui oblige à identifier terme à terme.

Réponse. a) $4x$ — b) 3 — c) $4x$ — d) $-5x$.

Correction de l'exercice 11 - Le programme de calcul

a) **Avec 5** : $5 \times 4 = 20$, puis $20 + 6 = 26$, puis $26 - 10 = 16$.

Avec -2 : $-2 \times 4 = -8$, puis $-8 + 6 = -2$, puis $-2 - (-4) = 2$.

b) On suit les étapes avec la lettre :

$$4x + 6 - 2x = 2x + 6$$

Contrôle sur a) : pour $x = 5$, $2 \times 5 + 6 = 16$ ✓ ; pour $x = -2$, $2 \times (-2) + 6 = 2$ ✓

c) On cherche x tel que $2x + 6 = 0$, soit $2x = -6$ et $x = -3$. Vérification par le programme : $-3 \times 4 = -12$, $-12 + 6 = -6$, $-6 - (-6) = 0$ ✓

L'intérêt de la forme réduite. Le programme semblait compter quatre étapes ; l'expression $2x + 6$ montre qu'il revient simplement à doubler le nombre et à ajouter 6. C'est exactement ce que le calcul littéral permet de découvrir.

Réponse. a) 16 et 2 — b) $2x + 6$ — c) $x = -3$.

Correction de l'exercice 12 - Le prix de la sortie

a) Le coût total additionne la part proportionnelle au nombre d'élèves et la part fixe :

$$C = 12n + 80$$

b) Le coût par élève est le coût total divisé par l'effectif :

$$c = \frac{12n + 80}{n}$$

c) Pour $n = 20$: $C = 240 + 80 = 320$ €, soit $320 \div 20 = 16$ € par élève.

Pour $n = 40$: $C = 480 + 80 = 560$ €, soit $560 \div 40 = 14$ € par élève.

d) Le coût par élève **diminue** quand n augmente : les 80 € de transport se répartissent sur davantage de participants. Chaque élève paie toujours ses 12 €, plus une part du transport qui vaut $\frac{80}{n}$ et se réduit à mesure que le groupe grandit.

Ce que l'expression littérale montre d'un coup. Écrire $c = 12 + \frac{80}{n}$ sépare la part fixe par élève de la part partagée, et rend la conclusion de la question d) évidente sans aucun calcul supplémentaire.

Réponse. a) $12n + 80$ — b) $12 + \frac{80}{n}$ — c) 320 € / 16 € et 560 € / 14 € — d) il diminue.

Correction de l'exercice 13 - Un assemblage de rectangles

a) La figure obtenue est un **rectangle** de largeur x et de longueur $2x + x = 3x$. Son périmètre vaut

$$P = 2 \times (3x + x) = 2 \times 4x = 8x$$

b) L'aire d'un rectangle est le produit de ses dimensions :

$$A = 3x \times x = 3x^2$$

On peut aussi additionner les deux morceaux : $2x \times x + x \times x = 2x^2 + x^2 = 3x^2$ ✓ Les deux méthodes concordent.

c) Le rectangle seul a pour aire $2x \times x = 2x^2$. La figure complète a donc une aire $\frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}$ fois plus grande, soit **une fois et demie** celle du rectangle — et ce rapport ne dépend pas de x .

L'avantage du calcul littéral. Le rapport $\frac{3}{2}$ est obtenu une fois pour toutes ; avec des

valeurs numériques, il faudrait recommencer pour chaque taille de figure.

Réponse. a) $P = 8x$ — b) $A = 3x^2$ — c) une fois et demie l'aire du rectangle.

Correction de l'exercice 14 - Réduire une longue expression

Regroupement par degré.

— termes en x^2 : $5x^2 - 2x^2 + x^2 = 4x^2$;

— termes en x : $-3x + 8x = 5x$;

— termes constants : $7 - 12 = -5$.

$$E = 4x^2 + 5x - 5$$

Les trois valeurs.

— pour $x = 0$: $E = 0 + 0 - 5 = -5$;

— pour $x = 1$: $E = 4 + 5 - 5 = 4$;

— pour $x = -1$: $E = 4 \times (-1)^2 + 5 \times (-1) - 5 = 4 - 5 - 5 = -6$.

Le contrôle sur l'expression de départ, pour $x = 1$: $5 - 3 + 7 - 2 + 8 - 12 + 1 = 4$ ✓ La réduction est validée.

Le piège du cas $x = -1$. $(-1)^2 = 1$ et non -1 : l'exposant 2 rend le terme positif. Oublier les parenthèses en écrivant 4×-1^2 conduirait à -4 et fausserait tout le calcul.

Réponse. $E = 4x^2 + 5x - 5$; valeurs -5 , 4 et -6 .

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : trois expressions à comparer

a) **Réduction de A.** On distribue le facteur 3 :

$$3(x + 2) = 3x + 6$$

donc $A = 3x + 6 - x = 2x + 6$.

Développement de C. $2(x + 3) = 2x + 6$.

b) Les trois expressions se réduisent toutes à $2x + 6$: elles sont **égales pour toute valeur** de x . Ce sont trois écritures d'une même expression, comme $\frac{2}{4}$ et $\frac{1}{2}$ sont deux écritures d'un même nombre.

c) Pour $x = -3$:

$$A = 3(-3 + 2) - (-3) = 3 \times (-1) + 3 = 0$$

et $B = -6 + 6 = 0$, $C = 2 \times 0 = 0$. Les trois valent 0 ✓

Interprétation. $x = -3$ est la valeur qui **annule** l'expression. La forme factorisée $C = 2(x + 3)$ la donne immédiatement : un produit est nul quand l'un de ses facteurs l'est, donc quand $x + 3 = 0$. C'est tout l'intérêt de savoir passer d'une forme à l'autre — chacune répond à une question différente.

Réponse. a) $A = 2x + 6$ et $C = 2x + 6$ — b) les trois sont égales — c) elles valent 0, car $x = -3$ annule $x + 3$.