

Plaquette 2 - Développer avec la distributivité

Calcul littéral — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Distributivité simple.

$$k(a + b) = ka + kb \quad k(a - b) = ka - kb$$

Double distributivité. Chaque terme de la première parenthèse multiplie chaque terme de la seconde — quatre produits en tout :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Le facteur peut être négatif : le signe se distribue lui aussi.

$$-3(x - 4) = -3x + 12$$

Le schéma de contrôle. Pour $(a + b)(c + d)$, on coche les quatre produits :

Produit	Origine
ac	premier par premier
ad	premier par second
bc	second par premier
bd	second par second

Après avoir développé, on réduit en regroupant les termes semblables.

Le sens dans l'autre sens. La distributivité sert aussi au calcul mental :

$$7 \times 102 = 7 \times (100 + 2) = 700 + 14 = 714$$

Le test qui valide. Une identité correcte reste vraie pour n'importe quelle valeur de la lettre : tester $x = 2$ prend dix secondes et détecte presque toutes les erreurs.

Correction de l'exercice 1 - Distributivité simple

La règle du cours.

$$k(a + b) = ka + kb$$

Le facteur extérieur multiplie **chaque** terme de la parenthèse.

a) $4(x + 5) = 4 \times x + 4 \times 5 = 4x + 20$.

b) $3(2y - 7) = 3 \times 2y - 3 \times 7 = 6y - 21$.

c) $x(x + 6) = x \times x + x \times 6 = x^2 + 6x$. Le facteur est ici une lettre : le premier produit devient un carré.

d) $5(3a + 2b) = 15a + 10b$. Les deux lettres étant différentes, le résultat ne se réduit pas davantage.

L'erreur la plus fréquente est d'oublier le second produit : écrire $4(x + 5) = 4x + 5$.

Test avec $x = 1$: le produit vaut $4 \times 6 = 24$, et $4x + 20 = 24$ ✓ alors que $4x + 5 = 9$ ✗ Un test numérique repère l'oubli immédiatement.

Réponse. a) $4x + 20$ — b) $6y - 21$ — c) $x^2 + 6x$ — d) $15a + 10b$.

Correction de l'exercice 2 - Un facteur négatif

La règle est la même, le signe se distribue aussi.

$$-3(x - 4) = -3x + 12$$

a) $-2(x + 3) = -2x - 6$: les deux termes deviennent négatifs.

b) $-5(2y - 4) = -10y + 20$: le second produit est $(-5) \times (-4) = +20$.

c) Un signe moins seul devant une parenthèse équivaut au facteur -1 :

$$-(3a - 7) = -3a + 7$$

Tous les signes intérieurs changent.

d) $-x(x - 2) = -x^2 + 2x$.

Le contrôle numérique sur b), avec $y = 1$: le produit vaut

$$-5 \times (2 - 4) = -5 \times (-2) = 10, \text{ et } -10 \times 1 + 20 = 10 \checkmark$$

Le piège à connaître. Le second terme est le plus souvent source d'erreur : deux signes moins donnent un plus. Écrire $-5(2y - 4) = -10y - 20$ est l'erreur classique, et le test avec $y = 1$ donnerait -30 au lieu de 10 .

Réponse. a) $-2x - 6$ — b) $-10y + 20$ — c) $-3a + 7$ — d) $-x^2 + 2x$.

Correction de l'exercice 3 - Développer puis regrouper

La méthode. On développe chaque produit séparément, puis on regroupe les termes semblables.

a) $3(x + 2) = 3x + 6$ et $4(x - 1) = 4x - 4$, d'où

$$3x + 6 + 4x - 4 = 7x + 2$$

b) $5(2a - 3) = 10a - 15$ et $-2(a + 4) = -2a - 8$ — attention, le facteur est -2 et non 2 . D'où $10a - 15 - 2a - 8 = 8a - 23$.

c) $2(y - 5) = 2y - 10$ et $-3(2y - 1) = -6y + 3$, d'où $2y - 10 - 6y + 3 = -4y - 7$.

Le contrôle numérique sur c), avec $y = 2$: l'expression de départ vaut

$$2 \times (-3) - 3 \times 3 = -6 - 9 = -15, \text{ et } -4 \times 2 - 7 = -15 \checkmark$$

Le geste qui évite l'erreur. Le signe moins placé devant la seconde parenthèse appartient au facteur : on écrit $-2(a + 4)$ et on distribue -2 , plutôt que de distribuer 2 puis d'essayer de rattraper les signes ensuite.

Réponse. a) $7x + 2$ — b) $8a - 23$ — c) $-4y - 7$.

Correction de l'exercice 4 - Double distributivité

La règle du cours — quatre produits :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

a) $(x + 3)(x + 5) = x \times x + x \times 5 + 3 \times x + 3 \times 5$, soit

$$x^2 + 5x + 3x + 15 = x^2 + 8x + 15$$

b) $(2y + 1)(y + 4) = 2y^2 + 8y + y + 4 = 2y^2 + 9y + 4$.

c) $(a + 6)(a - 2) = a^2 - 2a + 6a - 12 = a^2 + 4a - 12$.

Le contrôle numérique sur a), avec $x = 1$: le produit vaut $4 \times 6 = 24$, et

$$1 + 8 + 15 = 24 \checkmark$$

La méthode pour n'oublier aucun produit. On part toujours du premier terme de la parenthèse de gauche, on le multiplie par les deux termes de droite, puis on recommence

avec le second terme. Quatre produits attendus, quatre produits écrits : on compte avant de réduire.

Réponse. a) $x^2 + 8x + 15$ — b) $2y^2 + 9y + 4$ — c) $a^2 + 4a - 12$.

Correction de l'exercice 5 - Avec des signes moins

La règle reste la même, avec un soin particulier sur les signes :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

a) $(x - 4)(x - 3) = x^2 - 3x - 4x + 12 = x^2 - 7x + 12$. Le dernier produit est $(-4) \times (-3) = +12$.

b) $(2a - 5)(3a + 1) = 6a^2 + 2a - 15a - 5 = 6a^2 - 13a - 5$.

c) $(y - 7)(y + 7) = y^2 + 7y - 7y - 49 = y^2 - 49$: les deux termes du milieu **s'annulent**.

Le contrôle sur c), avec $y = 10$: le produit vaut $3 \times 17 = 51$, et $100 - 49 = 51$ ✓

Ce que le cas c) annonce. Chaque fois que les deux parenthèses ne diffèrent que par le signe du second terme, les termes du milieu disparaissent et il ne reste qu'une différence de carrés. C'est une identité qui sera étudiée pour elle-même en Troisième, mais qu'on peut déjà retrouver par le calcul.

Réponse. a) $x^2 - 7x + 12$ — b) $6a^2 - 13a - 5$ — c) $y^2 - 49$.

Correction de l'exercice 6 - L'erreur de Camille

a) Pour $x = 1$: $(1 + 2)(1 + 5) = 3 \times 6 = 18$, alors que $x^2 + 10 = 1 + 10 = 11$. L'écriture de Camille est fausse.

b) La règle demande **quatre** produits :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Camille a écrit $ac = x^2$ et $bd = 10$, mais a oublié les deux produits croisés $ad = 5x$ et $bc = 2x$ — soit $7x$ au total.

c) Le développement correct est

$$(x + 2)(x + 5) = x^2 + 5x + 2x + 10 = x^2 + 7x + 10$$

Contrôle avec $x = 1$: $1 + 7 + 10 = 18$ ✓

L'image qui aide. Un rectangle de côtés $x + 2$ et $x + 5$ se découpe en quatre morceaux : un carré x^2 , deux bandes de $5x$ et $2x$, et un petit rectangle $2 \times 5 = 10$. Camille n'a compté que les deux coins, en oubliant les deux bandes — qui sont pourtant, pour x grand, la plus grande partie de l'aire.

Réponse. a) 18 contre 11 — b) deux produits croisés, $5x$ et $2x$ — c) $x^2 + 7x + 10$.

Correction de l'exercice 7 - L'aire d'un rectangle, deux façons

a) **Forme produit.** L'aire d'un rectangle est le produit de ses dimensions :

$$A = 3(x + 4)$$

Forme développée. On distribue le facteur 3 :

$$3(x + 4) = 3x + 12$$

b) Pour $x = 6$: la longueur vaut 10 cm, donc $A = 3 \times 10 = 30 \text{ cm}^2$. Et la forme développée donne $3 \times 6 + 12 = 30$ ✓

c) Le premier morceau a pour aire $3x$, le second $3 \times 4 = 12$. Leur somme vaut $3x + 12$, c'est-à-dire exactement l'aire totale. **On retrouve la distributivité** : découper la

longueur en deux revient à découper l'aire en deux.

Pourquoi c'est important. La distributivité n'est pas une règle arbitraire à mémoriser : c'est la traduction algébrique d'un découpage d'aire. Chaque fois qu'un doute apparaît sur un développement, ce dessin permet de le lever.

Réponse. a) $3(x + 4) = 3x + 12$ — b) 30 cm^2 par les deux formes — c) le découpage illustre la distributivité.

Correction de l'exercice 8 - Calcul mental

Dans le sens du développement.

$$k(a + b) = ka + kb$$

a) $7 \times 102 = 7 \times (100 + 2) = 700 + 14 = 714.$

b) $25 \times 98 = 25 \times (100 - 2) = 2500 - 50 = 2450.$

Dans le sens de la factorisation. On reconnaît un facteur commun :

$$ka + kb = k(a + b)$$

c) $12 \times 45 + 12 \times 55 = 12 \times (45 + 55) = 12 \times 100 = 1200.$

d) $36 \times 7 - 26 \times 7 = (36 - 26) \times 7 = 10 \times 7 = 70.$

Ce que ces calculs montrent. La distributivité n'est pas réservée aux lettres : elle décrit une propriété des nombres, et c'est la même règle qui sert à développer $k(a + b)$ et à calculer 7×102 de tête. La lire dans les deux sens — développer, factoriser — est exactement ce que demandera la plaquette suivante.

Réponse. a) 714 — b) 2450 — c) 1200 — d) 70.

Correction de l'exercice 9 - Développer et évaluer

a) **Premier produit.** $(x + 3)(x - 1) = x^2 - x + 3x - 3 = x^2 + 2x - 3.$

Second produit. $x(x + 2) = x^2 + 2x.$

On soustrait, en changeant tous les signes du second :

$$E = x^2 + 2x - 3 - x^2 - 2x = -3$$

b) Pour $x = 4$: $E = 7 \times 3 - 4 \times 6 = 21 - 24 = -3$ ✓ Pour $x = 0$: $E = 3 \times (-1) - 0 = -3$ ✓

c) **L'expression ne dépend pas de x** : elle vaut -3 quelle que soit la valeur choisie. Les termes en x^2 et en x se sont entièrement compensés.

Comment le repérer avant de calculer. Les deux produits commencent par x^2 et ont le même terme en $2x$: leur différence ne pouvait donc laisser qu'une constante. C'est le genre de question qu'un contrôle pose volontiers, parce qu'un élève qui n'a pas réduit jusqu'au bout répondra « ça dépend de x ».

Réponse. a) $E = -3$ — b) -3 dans les deux cas — c) E est constante.

Correction de l'exercice 10 - Le carré d'une somme

a) On applique la double distributivité :

$$(x + 5)(x + 5) = x^2 + 5x + 5x + 25 = x^2 + 10x + 25$$

b) $(x - 3)(x - 3) = x^2 - 3x - 3x + 9 = x^2 - 6x + 9.$

c) Pour $x = 1$: $(1 + 5)^2 = 6^2 = 36$, alors que $x^2 + 25 = 1 + 25 = 26$. L'affirmation de Karim est donc **fausse** : il oublie le terme $10x$, qui vaut 10 ici, et $26 + 10 = 36$ ✓

D'où vient l'erreur. Karim applique au carré une règle vraie pour le produit :

$(ab)^2 = a^2b^2$. Mais un carré de **somme** n'est pas la somme des carrés, car les deux produits croisés ne s'annulent pas — au contraire, ils s'ajoutent.

L'image du carré. Un carré de côté $x + 5$ se découpe en un carré x^2 , un carré 25 et **deux** rectangles de $5x$: le terme $10x$ est l'aire de ces deux bandes, qu'on ne peut pas faire disparaître.

Réponse. a) $x^2 + 10x + 25$ — b) $x^2 - 6x + 9$ — c) $36 \neq 26$, il manque $10x$.

Correction de l'exercice 11 - Le jardin agrandi

a) Le nouveau jardin est un rectangle de dimensions $x + 4$ et $x + 2$:

$$A = (x + 4)(x + 2) = x^2 + 2x + 4x + 8 = x^2 + 6x + 8$$

b) L'aire initiale valait x^2 . L'augmentation est donc

$$(x^2 + 6x + 8) - x^2 = 6x + 8$$

c) Pour $x = 10$: l'augmentation vaut $6 \times 10 + 8 = 68 \text{ m}^2$.

Vérification directe. Le jardin passe de $10 \times 10 = 100 \text{ m}^2$ à $14 \times 12 = 168 \text{ m}^2$, soit 68 m^2 de plus ✓

La lecture géométrique du résultat. L'augmentation $6x + 8$ se décompose en une bande de $4x$ (le long d'un côté), une bande de $2x$ (le long de l'autre) et un coin de $4 \times 2 = 8 \text{ m}^2$. Les quatre termes du développement correspondent aux quatre morceaux de la figure : le calcul littéral raconte le découpage.

Réponse. a) $(x + 4)(x + 2) = x^2 + 6x + 8$ — b) $6x + 8$ — c) 68 m^2 .

Correction de l'exercice 12 - Deux formules de périmètre

a) Il suffit de développer la formule de Sofia :

$$2(L + \ell) = 2 \times L + 2 \times \ell = 2L + 2\ell$$

C'est exactement celle de Rémi. Les deux écritures sont donc **identiques pour toutes** les valeurs de L et ℓ : ce sont deux formes d'une même formule, l'une factorisée, l'autre développée.

b) **Formule de Sofia** : $L + \ell = 12$, donc $P = 2 \times 12 = 24 \text{ cm}$.

Formule de Rémi : $2 \times 7,5 + 2 \times 4,5 = 15 + 9 = 24 \text{ cm}$ ✓

c) Celle de Sofia : une addition puis un doublement, contre deux multiplications puis une addition. La forme factorisée demande **une** opération de moins, avantage qui se voit surtout avec des décimaux.

Ce qu'il faut retenir. Aucune des deux formes n'est « la bonne » : on choisit celle qui rend le calcul le plus simple. Savoir passer de l'une à l'autre, c'est précisément savoir développer et factoriser.

Réponse. a) $2(L + \ell) = 2L + 2\ell$ — b) 24 cm par les deux — c) la forme factorisée.

Correction de l'exercice 13 - Enchaîner trois développements

Développement terme à terme.

$$- 2(x + 1) = 2x + 2 ;$$

$$- 3(x - 4) = 3x - 12 ;$$

$$- -(x + 5) = -x - 5 \text{ (le signe moins équivaut au facteur } -1).$$

Regroupement.

$$F = 2x + 2 + 3x - 12 - x - 5 = 4x - 15$$

(termes en x : $2 + 3 - 1 = 4$; constantes : $2 - 12 - 5 = -15$).

Les deux valeurs. Pour $x = 3$: $F = 12 - 15 = -3$. Pour $x = -2$: $F = -8 - 15 = -23$.

Contrôle sur l'expression de départ, avec $x = 3$: $2 \times 4 + 3 \times (-1) - 8 = 8 - 3 - 8 = -3$ ✓

Le point de vigilance. La troisième parenthèse n'a pas de coefficient écrit, seulement un signe moins : c'est celle que l'on développe le plus souvent de travers. Écrire explicitement $-1 \times (x + 5)$ avant de distribuer supprime le risque.

Réponse. $F = 4x - 15$; $F(3) = -3$ et $F(-2) = -23$.

Correction de l'exercice 14 - Les places de cinéma

a) Les 8 places pleines coûtent $8x$, et les 5 places réduites $5(x - 3)$. La dépense est donc

$$D = 8x + 5(x - 3) = 8x + 5x - 15 = 13x - 15$$

b) Pour $x = 9$: $D = 13 \times 9 - 15 = 117 - 15 = 102$ €.

Vérification directe : $8 \times 9 = 72$ € et $5 \times 6 = 30$ €, soit 102 € ✓

c) On cherche x tel que $13x - 15 = 126$, donc $13x = 141$ et $x = \frac{141}{13}$, qui ne tombe pas juste (environ 10,85 €). Un prix de place réaliste serait 11 € — la dépense vaudrait alors $13 \times 11 - 15 = 128$ €.

Ce que la question c) enseigne. Une expression littérale permet de remonter de la dépense au prix unitaire ; elle révèle aussi quand l'énoncé propose un total incompatible avec un prix « rond », ce qu'un calcul numérique isolé ne montrerait pas.

Réponse. a) $D = 13x - 15$ — b) 102 € — c) $x = \frac{141}{13} \approx 10,85$ €, valeur non entière.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : un carré entouré

a) La bordure ajoute 1 m de chaque côté, donc 2 m au total : le grand carré a pour côté $x + 2$.

b) On développe le carré :

$$(x + 2)^2 = (x + 2)(x + 2) = x^2 + 2x + 2x + 4 = x^2 + 4x + 4$$

c) L'aire de la bordure est la différence entre les deux carrés :

$$(x^2 + 4x + 4) - x^2 = 4x + 4$$

d) Pour $x = 6$: la bordure vaut $4 \times 6 + 4 = 28$ m².

Vérification par les aires. Le grand carré mesure $8 \times 8 = 64$ m², le petit $6 \times 6 = 36$ m², différence 28 m² ✓

Vérification par le découpage. La bordure se compose de quatre bandes de $1 \times 6 = 6$ m² et de quatre coins de $1 \times 1 = 1$ m², soit $4 \times 6 + 4 \times 1 = 28$ m². On retrouve **exactement** l'expression $4x + 4$: les quatre bandes donnent $4x$, les quatre coins donnent 4. Le calcul littéral et la figure disent la même chose.

Réponse. a) $x + 2$ — b) $x^2 + 4x + 4$ — c) $4x + 4$ — d) 28 m².