

Plaquelette 3 - Factoriser : reconnaître le facteur commun

Calcul littéral — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

La règle, lue de droite à gauche.

$$ka + kb = k(a + b) \quad ka - kb = k(a - b)$$

Le nombre k est le **facteur commun** : il apparaît dans les deux termes.

Où chercher le facteur commun.

Expression	Facteur commun
$6x + 9$	le nombre 3
$x^2 + 5x$	la lettre x
$12x^2 + 8x$	le produit $4x$
$3(x + 1) + x(x + 1)$	la parenthèse $(x + 1)$

Prendre le plus grand facteur possible. $12x^2 + 8x = 2(6x^2 + 4x)$ est exact, mais incomplet : $4x$ est le bon facteur, et $12x^2 + 8x = 4x(3x + 2)$.

Attention au terme qui disparaît. Quand un terme est entièrement le facteur commun, il reste un 1 :

$$x^2 + x = x(x + 1) \quad 5a - 5 = 5(a - 1)$$

Le contrôle obligatoire. On redéveloppe le produit obtenu : il doit redonner la somme de départ. Une factorisation se vérifie toujours en quelques secondes.

À quoi ça sert. Une forme factorisée montre immédiatement pour quelle valeur l'expression s'annule, et allège les calculs numériques.

Correction de l'exercice 1 - Repérer le facteur commun

Ce qu'on cherche. Un facteur présent dans **chacun** des deux termes, conformément à la règle :

$$ka + kb = k(a + b)$$

- a) Les deux termes contiennent le nombre 7 : le facteur commun est 7.
- b) $5a^2 = 5 \times a \times a$ et $15a = 5 \times 3 \times a$: le facteur commun est $5a$, qui regroupe le nombre 5 et la lettre a .
- c) Les deux termes contiennent la parenthèse $(x + 2)$: c'est elle le facteur commun. Un facteur commun n'est pas forcément un nombre ou une lettre, il peut être une expression entière.
- d) $6 = 3 \times 2$ et $9 = 3 \times 3$: le facteur commun est 3. Les lettres m et n étant différentes, elles n'apportent rien.

Le réflexe pour ne pas se tromper. On décompose chaque terme en produit de facteurs, puis on garde ce qui figure dans les deux listes. En b), $5 \times a \times a$ et $5 \times 3 \times a$ ont en commun un 5 et un a : d'où $5a$.

Réponse. a) 7 — b) $5a$ — c) $(x + 2)$ — d) 3.

Correction de l'exercice 2 - Factoriser par un nombre

La règle du cours.

$$ka + kb = k(a + b)$$

a) $6 = 3 \times 2$ et $15 = 3 \times 5$, donc $6x + 15 = 3(2x + 5)$.

b) 12 et 18 sont tous deux multiples de 6 : $12y - 18 = 6(2y - 3)$.

c) 20 et 35 sont multiples de 5 : $20a + 35b = 5(4a + 7b)$.

d) $14x - 7 = 7 \times 2x - 7 \times 1 = 7(2x - 1)$. Le second terme étant exactement le facteur commun, il laisse un 1 dans la parenthèse — et non un vide.

Le contrôle, à faire à chaque fois. On redéveloppe : $3(2x + 5) = 6x + 15$ ✓
 $6(2y - 3) = 12y - 18$ ✓ $7(2x - 1) = 14x - 7$ ✓

L'erreur classique en d) consiste à écrire $7(2x)$ en oubliant le -1 . Le test numérique la révèle aussitôt : pour $x = 1$, l'expression vaut 7, et $7(2 - 1) = 7$ ✓ alors que $7 \times 2 = 14$ ✗

Réponse. a) $3(2x + 5)$ — b) $6(2y - 3)$ — c) $5(4a + 7b)$ — d) $7(2x - 1)$.

Correction de l'exercice 3 - Factoriser par une lettre

Le facteur commun est ici une lettre.

$$ka + kb = k(a + b)$$

a) $x^2 = x \times x$ et $7x = x \times 7$, donc $x^2 + 7x = x(x + 7)$.

b) $y^2 - y = y \times y - y \times 1 = y(y - 1)$. Le second terme laisse un 1.

c) $3a^2 + 5a = a(3a + 5)$: le nombre commun n'existe pas (3 et 5 n'ont que 1 en commun), mais la lettre a est bien présente deux fois.

d) $x^3 = x^2 \times x$ et $x^2 = x^2 \times 1$, donc $x^3 + x^2 = x^2(x + 1)$.

Le contrôle. $x(x + 7) = x^2 + 7x$ ✓ $y(y - 1) = y^2 - y$ ✓ $x^2(x + 1) = x^3 + x^2$ ✓

Ce que la forme factorisée apprend en a). Le produit $x(x + 7)$ est nul exactement quand $x = 0$ ou $x = -7$. La forme développée $x^2 + 7x$ ne laisse rien deviner de tel : chaque écriture répond à une question différente.

Réponse. a) $x(x + 7)$ — b) $y(y - 1)$ — c) $a(3a + 5)$ — d) $x^2(x + 1)$.

Correction de l'exercice 4 - Le plus grand facteur commun

L'exigence. On prend le plus grand facteur possible : nombre **et** lettre.

a) $12x^2 = 4x \times 3x$ et $8x = 4x \times 2$, donc

$$12x^2 + 8x = 4x(3x + 2)$$

Factoriser seulement par 2 donnerait $2(6x^2 + 4x)$: exact, mais la parenthèse reste factorisable, donc le travail n'est pas fini.

b) Le PGCD de 18 et 24 est 6, et la lettre a est commune : $18a^2 - 24a = 6a(3a - 4)$.

c) Le PGCD de 10 et 15 est 5, et y est commun : $10y^2 + 15y = 5y(2y + 3)$.

Le contrôle. $4x(3x + 2) = 12x^2 + 8x$ ✓ $6a(3a - 4) = 18a^2 - 24a$ ✓ $5y(2y + 3) = 10y^2 + 15y$ ✓

Comment savoir qu'on a fini. Les deux termes restés dans la parenthèse ne doivent plus avoir de facteur commun : $3x$ et 2 n'en ont pas, $3a$ et 4 non plus, $2y$ et 3 non plus.

Réponse. a) $4x(3x + 2)$ — b) $6a(3a - 4)$ — c) $5y(2y + 3)$.

Correction de l'exercice 5 - Le facteur commun est une parenthèse

Le principe est le même, le facteur commun étant simplement une expression :

$$ka + kb = k(a + b)$$

a) Le facteur commun est $(x + 3)$:

$$5(x + 3) + x(x + 3) = (x + 3)(5 + x)$$

b) Le facteur commun est $(y - 2)$: $(y - 2)(7 - y)$.

c) Le second terme vaut $(a + 1) \times 1$, donc

$$(a + 1)(a + 4) + (a + 1) = (a + 1)((a + 4) + 1) = (a + 1)(a + 5)$$

Le contrôle sur c). On développe : $(a + 1)(a + 5) = a^2 + 5a + a + 5 = a^2 + 6a + 5$, et l'expression de départ donne $(a^2 + 5a + 4) + (a + 1) = a^2 + 6a + 5$ ✓

Le piège de c). Le terme $(a + 1)$ tout seul laisse un 1 dans la parenthèse — exactement comme $5a - 5 = 5(a - 1)$. L'oublier donnerait $(a + 1)(a + 4)$, qui est l'expression de départ amputée d'un terme.

Réponse. a) $(x + 3)(5 + x)$ — b) $(y - 2)(7 - y)$ — c) $(a + 1)(a + 5)$.

Correction de l'exercice 6 - Factoriser pour calculer vite

La règle, lue dans le sens de la factorisation.

$$ka + kb = k(a + b)$$

a) Le facteur commun est 37 : $37 \times (12 + 88) = 37 \times 100 = 3700$.

b) Le facteur commun est 4,5 : $4,5 \times (17 - 7) = 4,5 \times 10 = 45$.

c) Le second terme vaut 56×1 , donc le facteur commun est 56 :

$$99 \times 56 + 56 = 56 \times (99 + 1) = 56 \times 100 = 5600$$

d) Le facteur commun est 2,5 : $2,5 \times (36 + 64) = 2,5 \times 100 = 250$.

Pourquoi ces calculs sont faisables de tête. Dans chaque cas, la somme des deux autres facteurs donne un nombre rond. Reconnaître le facteur commun transforme deux multiplications difficiles en une seule multiplication facile.

Le lien avec le calcul littéral. Ce sont exactement les mêmes gestes que sur $ka + kb$: les nombres ne sont qu'un cas particulier des lettres.

Réponse. a) 3700 — b) 45 — c) 5600 — d) 250.

Correction de l'exercice 7 - L'erreur de Jade

a) On développe l'écriture de Jade :

$$3(2x + 9) = 6x + 27$$

Ce n'est pas $6x + 9$: le terme constant est trois fois trop grand.

b) Pour $x = 1$: l'expression de départ vaut $6 + 9 = 15$, et celle de Jade $3 \times 11 = 33$ ✗

c) La factorisation correcte est

$$6x + 9 = 3 \times 2x + 3 \times 3 = 3(2x + 3)$$

Jade a bien divisé le premier terme par 3, mais a recopié le second tel quel. Or **chaque** terme doit être divisé par le facteur commun : c'est la lecture inverse de $k(a + b) = ka + kb$, où k multiplie les deux termes.

Contrôle de la bonne réponse : $3(2x + 3) = 6x + 9$ ✓ et pour $x = 1$, $3 \times 5 = 15$ ✓

La règle de sécurité. Après toute factorisation, redévelopper. Dix secondes de vérification éliminent cette erreur, qui est de très loin la plus fréquente du chapitre.

Réponse. a) $3(2x + 9) = 6x + 27 \neq 6x + 9$ — c) $6x + 9 = 3(2x + 3)$.

Correction de l'exercice 8 - Deux terrains côte à côte

a) **Forme développée.** Chaque terrain a pour aire le produit de ses dimensions :

$$A = 25x + 15x$$

Forme factorisée. Le facteur commun est x :

$$25x + 15x = x(25 + 15) = 40x$$

b) La forme factorisée dit que les deux terrains accolés forment **un seul rectangle** de largeur x et de longueur $25 + 15 = 40$ m. Factoriser, c'est ici recoller les deux parcelles.

c) Pour $x = 12$:

— forme développée : $25 \times 12 + 15 \times 12 = 300 + 180 = 480 \text{ m}^2$;

— forme factorisée : $40 \times 12 = 480 \text{ m}^2$ ✓

Ce que l'exercice montre. La forme factorisée est plus économique — une multiplication au lieu de deux et une addition — et elle porte un sens géométrique. Développer et factoriser ne sont pas deux exercices de style : ce sont deux façons de voir la même figure.

Réponse. a) $25x + 15x = 40x$ — b) un seul rectangle de longueur 40 m — c) 480 m^2 .

Correction de l'exercice 9 - Factoriser puis évaluer

a) Le PGCD de 8 et 12 est 4, et la lettre x est commune :

$$8x^2 - 12x = 4x(2x - 3)$$

Contrôle : $4x \times 2x = 8x^2$ et $4x \times (-3) = -12x$ ✓

b) Avec la forme factorisée : $E = 4 \times 5 \times (2 \times 5 - 3) = 20 \times 7 = 140$.

Avec la forme développée : $8 \times 25 - 12 \times 5 = 200 - 60 = 140$ ✓ La forme factorisée demande deux opérations de moins.

c) Un produit est nul lorsque l'un de ses facteurs est nul. Ici $E = 4x(2x - 3)$ s'annule si $4x = 0$, c'est-à-dire $x = 0$, ou si $2x - 3 = 0$, c'est-à-dire $x = \frac{3}{2}$.

Vérification : pour $x = \frac{3}{2}$, $E = 8 \times \frac{9}{4} - 12 \times \frac{3}{2} = 18 - 18 = 0$ ✓

L'apport décisif de la factorisation. La forme développée $8x^2 - 12x$ ne permet pas de deviner ces deux valeurs ; la forme factorisée les donne en une lecture.

Réponse. a) $4x(2x - 3)$ — b) 140 — c) $x = 0$ et $x = \frac{3}{2}$.

Correction de l'exercice 10 - Vérifier une factorisation

La méthode de contrôle. On développe le membre de droite et on compare.

a) $5(2x - 5) = 10x - 25$ ✓ La factorisation est **correcte**.

b) $3y(y + 6) = 3y^2 + 18y$, alors que l'expression de départ est $3y^2 + 6y$. La factorisation est **fausse** : en divisant $6y$ par le facteur $3y$, on obtient 2 et non 6. La bonne écriture est

$$3y^2 + 6y = 3y(y + 2)$$

c) $a(a - 1) = a^2 - a$ ✓ La factorisation est **correcte**.

Test numérique de b), avec $y = 1$: l'expression vaut $3 + 6 = 9$, la factorisation proposée $3 \times 7 = 21$ ✗, la factorisation corrigée $3 \times 3 = 9$ ✓

Ce que cet exercice installe. Vérifier une factorisation ne demande aucune idée nouvelle : il suffit de développer. C'est pourquoi une factorisation fautive n'a aucune excuse — le contrôle est toujours à portée de main.

Réponse. a) correcte — b) fautive, c'est $3y(y + 2)$ — c) correcte.

Correction de l'exercice 11 - La remise sur deux articles

a) **Forme développée.** $6x + 6(x + 2) = 6x + 6x + 12 = 12x + 12$.

Forme factorisée. Le facteur commun 6 apparaît dès le départ :

$$6x + 6(x + 2) = 6(x + (x + 2)) = 6(2x + 2) = 12(x + 1)$$

b) Avec la forme $12(x + 1)$: $12 \times 4,50 = 54$ €. C'est la plus rapide — une addition puis une multiplication.

Contrôle par le détail : $6 \times 3,50 = 21$ € de cahiers et $6 \times 5,50 = 33$ € de classeurs, soit 54 € ✓

c) La nouvelle dépense est $12(x + 1) - 10$, soit $12x + 2$ sous forme développée. Pour $x = 3,50$: 44 €.

La lecture de la forme factorisée. $12(x + 1)$ signifie que le client achète en tout 12 articles dont le prix moyen est $x + 1$ — la moyenne entre x et $x + 2$. La factorisation a fait apparaître un fait que la forme développée cachait.

Réponse. a) $12x + 12 = 12(x + 1)$ — b) 54 € — c) $12x + 2$, soit 44 €.

Correction de l'exercice 12 - Factoriser une expression à trois termes

Le principe s'étend à trois termes : le facteur commun doit figurer dans les trois.

$$ka + kb + kc = k(a + b + c)$$

a) Les coefficients 4, 8 et 12 ont pour PGCD 4 ; la plus petite puissance de x présente est x :

$$4x^2 + 8x + 12x^3 = 4x(x + 2 + 3x^2)$$

b) PGCD de 5, 10 et 15 : 5 ; plus petite puissance de a : a . D'où $5a(a^2 - 2a + 3)$.

c) PGCD de 6, 9 et 3 : 3. La lettre y n'est pas dans le troisième terme, elle ne peut donc pas entrer dans le facteur : $3(2y^2 + 3y - 1)$.

Le contrôle. $4x(x + 2 + 3x^2) = 4x^2 + 8x + 12x^3$ ✓ $3(2y^2 + 3y - 1) = 6y^2 + 9y - 3$ ✓

La règle à retenir en c). Un facteur n'est commun que s'il figure dans **tous** les termes, sans exception. Le terme constant -3 interdit ici de factoriser par y .

Réponse. a) $4x(x + 2 + 3x^2)$ — b) $5a(a^2 - 2a + 3)$ — c) $3(2y^2 + 3y - 1)$.

Correction de l'exercice 13 - Développer d'abord, factoriser ensuite

a) Le facteur commun est la parenthèse $(x + 2)$:

$$G = (x + 2)(3 + x)$$

b) **Développement.** $3(x + 2) = 3x + 6$ et $x(x + 2) = x^2 + 2x$, donc

$$G = x^2 + 2x + 3x + 6 = x^2 + 5x + 6$$

On peut aussi partir de la forme factorisée : $(x + 2)(x + 3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$ ✓ Les deux chemins donnent la même expression.

c) Pour $x = 4$: forme factorisée $6 \times 7 = 42$; forme développée $16 + 20 + 6 = 42$ ✓

Ce que l'exercice met en place. Une même expression possède deux écritures utiles. La factorisée sert à trouver les valeurs qui l'annulent (ici $x = -2$ et $x = -3$) ; la développée sert à comparer des expressions ou à repérer leur degré. Savoir circuler entre les deux est l'objectif du chapitre.

Réponse. a) $G = (x + 2)(x + 3)$ — b) $G = x^2 + 5x + 6$ — c) les deux valent 42.

Correction de l'exercice 14 - Le cadre de la photo

a) **Carton** : $(x + 6)^2 = x^2 + 12x + 36$. **Photo** : x^2 .

b) **Forme développée** de l'aire visible :

$$(x^2 + 12x + 36) - x^2 = 12x + 36$$

Forme factorisée. Le facteur commun est 12 :

$$12x + 36 = 12(x + 3)$$

c) Pour $x = 9$: $12 \times 12 = 144 \text{ cm}^2$.

Vérification directe : le carton mesure $15 \times 15 = 225 \text{ cm}^2$, la photo 81 cm^2 , différence 144 cm^2 ✓

La lecture géométrique. La bordure fait 3 cm de large de chaque côté (puisque 6 cm se répartissent également). Elle se décompose en quatre bandes de $3x$ et quatre coins de 9 cm^2 , soit $12x + 36$. La forme factorisée $12(x + 3)$ revient à dire que la bordure équivaut à un rectangle de 12 cm sur $x + 3$ cm — même aire, autre découpage.

Réponse. a) $(x + 6)^2$ et x^2 — b) $12x + 36 = 12(x + 3)$ — c) 144 cm^2 .

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : les trois écritures

a) Le facteur commun est $(2x + 1)$:

$$H = (2x + 1)((x - 3) + (x + 5)) = (2x + 1)(2x + 2)$$

On peut aller plus loin en factorisant la seconde parenthèse par 2 :

$$H = 2(2x + 1)(x + 1)$$

b) **Développement.** $(2x + 1)(2x + 2) = 4x^2 + 4x + 2x + 2 = 4x^2 + 6x + 2$.

c) Un produit est nul quand l'un de ses facteurs l'est. Avec $H = 2(2x + 1)(x + 1)$: soit $2x + 1 = 0$, donc $x = -\frac{1}{2}$; soit $x + 1 = 0$, donc $x = -1$.

Vérification pour $x = -1$: $H = (-1)(-4) + (-1)(4) = 4 - 4 = 0$ ✓

d) Pour $x = 2$, la forme factorisée est la plus rapide : $H = 2 \times 5 \times 3 = 30$. Contrôle par la forme développée : $16 + 12 + 2 = 30$ ✓

Le bilan du chapitre. Trois écritures d'un même objet : la somme de produits pour l'énoncé, le produit pour trouver les valeurs qui annulent, la forme développée pour identifier le degré. On choisit selon la question posée.

Réponse. a) $H = 2(2x + 1)(x + 1)$ — b) $4x^2 + 6x + 2$ — c) $x = -\frac{1}{2}$ et $x = -1$ — d) $H = 30$.