

Plaquette 4 - Substituer, tester, démontrer

Calcul littéral — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Substituer, c'est remplacer chaque lettre par sa valeur, **entre parenthèses**, puis calculer en respectant les priorités.

$$\text{Pour } x = -3: \quad x^2 = (-3)^2 = 9 \quad -x^2 = -(-3)^2 = -9$$

Les parenthèses ne sont pas facultatives.

Expression	Pour $x = -2$	Valeur
x^2	$(-2)^2$	4
$-x^2$	$-(-2)^2$	-4
$2x$	$2 \times (-2)$	-4
$(2x)^2$	$(2 \times (-2))^2$	16

Tester une égalité. On calcule séparément chaque membre pour la valeur donnée ; l'égalité est vérifiée si les deux résultats coïncident.

Un exemple ne démontre rien, un contre-exemple réfute tout. Une égalité vraie pour $x = 2$ peut être fausse ailleurs ; une seule valeur qui ne marche pas suffit à conclure qu'elle est fausse.

Démontrer une propriété sur les nombres, c'est la traduire en lettres :

Énoncé	Écriture
un entier quelconque	n
son suivant	$n + 1$
un nombre pair	$2n$
un nombre impair	$2n + 1$

Formules à savoir appliquer. Aire du rectangle $L \times \ell$, du triangle $\frac{b \times h}{2}$, du disque πr^2 , périmètre du cercle $2\pi r$.

Correction de l'exercice 1 - Calculer pour plusieurs valeurs

La substitution, valeur par valeur, dans

$$A = 3x + 7$$

- $x = 0 : A = 3 \times 0 + 7 = 7$;
- $x = 4 : A = 12 + 7 = 19$;
- $x = 10 : A = 30 + 7 = 37$;
- $x = 100 : A = 300 + 7 = 307$.

La remarque. Chaque fois que x augmente de 1, A augmente de 3. On le voit sur les valeurs, et on peut le démontrer :

$$3(x + 1) + 7 = 3x + 3 + 7 = (3x + 7) + 3 = A + 3$$

Ce que le coefficient signifie. Le nombre 3 devant x mesure l'augmentation de l'expression quand x augmente d'une unité ; le nombre 7 est la valeur de départ, celle obtenue pour $x = 0$. Cette lecture ressortira en Troisième avec les fonctions affines.

Réponse. 7, 19, 37, 307 ; A augmente de 3 chaque fois que x augmente de 1.

Correction de l'exercice 2 - Avec des nombres négatifs

La règle absolue. On remplace x par sa valeur **entre parenthèses**, puis on calcule.

Pour $x = 2$:

$$B = 2^2 - 4 \times 2 + 1 = 4 - 8 + 1 = -3$$

Pour $x = -1$:

$$B = (-1)^2 - 4 \times (-1) + 1 = 1 + 4 + 1 = 6$$

Le terme $-4x$ devient **positif**, puisqu'on multiplie deux nombres négatifs.

Pour $x = -3$:

$$B = (-3)^2 - 4 \times (-3) + 1 = 9 + 12 + 1 = 22$$

Les deux pièges de cet exercice. D'abord $(-3)^2 = 9$ et non -9 : l'exposant porte sur le nombre entier, parenthèses comprises. Ensuite $-4 \times (-3) = +12$: soustraire un nombre négatif revient à ajouter. Sans les parenthèses, on écrirait $-3^2 = -9$ et le résultat serait faux de 18.

Réponse. $B(2) = -3$, $B(-1) = 6$, $B(-3) = 22$.

Correction de l'exercice 3 - Décimaux et fractions

Même geste, valeurs non entières.

$$C = 2x + 5$$

Pour $x = 1,5$: $C = 2 \times 1,5 + 5 = 3 + 5 = 8$.

Pour $x = \frac{3}{4}$:

$$C = 2 \times \frac{3}{4} + 5 = \frac{3}{2} + 5 = \frac{3}{2} + \frac{10}{2} = \frac{13}{2} = 6,5$$

Pour $x = -2,5$: $C = 2 \times (-2,5) + 5 = -5 + 5 = 0$.

Ce que révèle la dernière valeur. $x = -2,5$ **annule** l'expression. On peut la retrouver sans tâtonner : $2x + 5 = 0$ donne $2x = -5$, donc $x = -\frac{5}{2}$.

Le point de méthode. Une lettre ne représente pas nécessairement un entier : elle peut valoir une fraction ou un décimal, positif ou négatif. Les règles de calcul, elles, ne changent pas — c'est justement ce qui fait la puissance du calcul littéral.

Réponse. $C(1,5) = 8$, $C\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{13}{2}$, $C(-2,5) = 0$.

Correction de l'exercice 4 - Tester une égalité

La méthode. On calcule **séparément** les deux membres, puis on compare.

a) **Pour** $x = 4$. Membre de gauche : $5 \times 4 - 3 = 17$. Membre de droite : $2 \times 4 + 9 = 17$. Les deux coïncident : 4 **est** solution.

b) **Pour** $x = 2$. Gauche : $10 - 3 = 7$. Droite : $4 + 9 = 13$. Les deux diffèrent : 2 n'est **pas** solution.

c) **Pour** $x = -1$. Gauche : $-5 - 3 = -8$. Droite : $-2 + 9 = 7$. -1 n'est **pas** solution.

Ce qu'il faut bien comprendre. Une égalité de ce type n'est pas vraie pour tous les nombres, contrairement à une identité comme $2(x + 3) = 2x + 6$. Elle n'est vraie que pour certaines valeurs, appelées **solutions** :

$$5x - 3 = 2x + 9 \text{ donne } 3x = 12 \text{ donc } x = 4$$

Ici il n'y en a qu'une, ce qui explique les réponses de b) et c).

Réponse. a) oui — b) non ($7 \neq 13$) — c) non ($-8 \neq 7$).

Correction de l'exercice 5 - Formules de géométrie

a) **La formule du cours :**

$$A = \frac{b \times h}{2} = \frac{7 \times 4,5}{2} = \frac{31,5}{2} = 15,75 \text{ cm}^2$$

b) **Le périmètre du cercle :**

$$P = 2\pi r = 2\pi \times 5 = 10\pi \text{ cm}$$

C'est la valeur **exacte**. Arrondie au dixième : $10 \times 3,14159... \approx 31,4 \text{ cm}$.

c) **L'aire du disque :**

$$A = \pi r^2 = \pi \times 3^2 = 9\pi \text{ cm}^2$$

soit environ $28,3 \text{ cm}^2$.

Ne pas confondre les deux formules du cercle. Le périmètre est en r , l'aire en r^2 : l'une se mesure en centimètres, l'autre en centimètres carrés. Le contrôle des unités suffit à les distinguer.

La valeur exacte. Écrire 10π plutôt que $31,4$ garde le résultat juste : π n'a pas d'écriture décimale finie, tout arrondi introduit une erreur qui s'amplifie dans les calculs suivants.

Réponse. a) $15,75 \text{ cm}^2$ — b) $10\pi \approx 31,4 \text{ cm}$ — c) $9\pi \approx 28,3 \text{ cm}^2$.

Correction de l'exercice 6 - Des degrés Celsius aux Fahrenheit

a) **Substitution directe** dans $F = 1,8C + 32$:

- $C = 0$: $F = 32$ °F (la glace fond) ;
- $C = 25$: $F = 45 + 32 = 77$ °F ;
- $C = 100$: $F = 180 + 32 = 212$ °F (l'eau bout).

b) Pour $C = -40$:

$$F = 1,8 \times (-40) + 32 = -72 + 32 = -40$$

On trouve -40 °F : c'est **la seule température où les deux échelles coïncident**.

c) On cherche C tel que $1,8C + 32 = 50$, donc $1,8C = 18$ et $C = 10$ °C.

Vérification : $1,8 \times 10 + 32 = 50$ ✓

Ce que la formule apprend. Le coefficient $1,8$ dit qu'une hausse de 1 °C correspond à une hausse de $1,8$ °F ; le 32 décale l'origine des échelles. La lettre permet de convertir dans les deux sens, alors qu'un tableau de valeurs ne couvrirait que quelques cas.

Réponse. a) $32, 77$ et 212 °F — b) -40 °F, seul point commun aux deux échelles — c) 10 °C.

Correction de l'exercice 7 - Compléter un tableau

Substitution valeur par valeur dans $D = x^2 - 3x$:

- $x = -2 : (-2)^2 - 3 \times (-2) = 4 + 6 = 10 ;$
- $x = -1 : 1 + 3 = 4 ;$
- $x = 0 : 0 - 0 = 0 ;$
- $x = 1 : 1 - 3 = -2 ;$
- $x = 2 : 4 - 6 = -2 ;$
- $x = 3 : 9 - 9 = 0 ;$
- $x = 4 : 16 - 12 = 4.$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
D	10	4	0	-2	-2	0	4

D est négatif pour $x = 1$ et $x = 2$ (les deux seules valeurs du tableau).

Ce que la forme factorisée explique. $D = x(x - 3)$: le produit est négatif quand les deux facteurs sont de signes contraires, c'est-à-dire pour x strictement compris entre 0 et 3. Le tableau ne montre que les entiers de cet intervalle, mais la factorisation donne la réponse complète — et elle explique aussi les deux zéros, en $x = 0$ et $x = 3$.

Réponse. 10, 4, 0, -2, -2, 0, 4 ; $D < 0$ pour $x = 1$ et $x = 2$.

Correction de l'exercice 8 - L'erreur d'Élias

a) **Le calcul correct.** L'exposant se calcule **avant** le signe moins de tête :

$$-x^2 = -((-4)^2) = -16$$

Élias a appliqué le carré au tout, ce qui revient à calculer $(-x)^2$.

b) $(-x)^2$ pour $x = -4$: l'opposé de -4 est 4, donc

$$(-x)^2 = 4^2 = 16$$

C'est le résultat qu'Élias avait trouvé — mais pour une autre expression.

c) On cherche x tel que $-x^2 = (-x)^2$, c'est-à-dire $-x^2 = x^2$. Cela impose $2x^2 = 0$, donc $x = 0$. **Les deux expressions ne coïncident que pour $x = 0$.**

La règle de priorité en cause. Les puissances passent avant les signes et les multiplications : dans $-x^2$, le carré porte sur x seul. Pour que le carré porte sur l'opposé, il faut l'écrire $(-x)^2$. Une paire de parenthèses fait ici toute la différence.

Réponse. a) $-x^2 = -16$ — b) $(-x)^2 = 16$ — c) uniquement pour $x = 0$.

Correction de l'exercice 9 - Deux expressions à départager

a) **Substitutions.**

- $x = 0 : E = 2 \times 3 = 6$ et $F = 3 ;$
- $x = 1 : E = 2 \times 4 = 8$ et $F = 5 ;$
- $x = 5 : E = 2 \times 8 = 16$ et $F = 13.$

b) **Non.** Il suffit d'un contre-exemple, et on en a trois. En développant, on voit d'où vient l'écart :

$$E = 2(x + 3) = 2x + 6 \quad F = 2x + 3$$

L'écart vaut toujours 3, quelle que soit la valeur de x .

c) Puisque $E - F = 3$ pour tout x , les deux expressions **ne coïncident jamais**.

Ce que l'exercice installe. La parenthèse indique que le facteur 2 porte sur toute la somme ; sans elle, il ne multiplie que x . Écrire $2x + 3$ au lieu de $2(x + 3)$ est l'erreur de

traduction la plus fréquente des problèmes — et ici elle fausse le résultat de 3 à chaque fois.

Réponse. a) (6; 3), (8; 5), (16; 13) — b) non — c) jamais, l'écart vaut toujours 3.

Correction de l'exercice 10 - Deux entiers consécutifs

a) $7 + 8 = 15$; $12 + 13 = 25$; $20 + 21 = 41$.

b) Les trois résultats sont **impairs**. Trois exemples suggèrent une règle, mais ne la démontrent pas : peut-être un quatrième cas échouerait-il.

c) **La démonstration.** On appelle n le premier entier ; le suivant s'écrit $n + 1$. Leur somme vaut

$$n + (n + 1) = 2n + 1$$

Or $2n$ est pair, donc $2n + 1$ est impair — et ce, **quel que soit** l'entier n . La propriété est démontrée pour tous les cas d'un coup.

Contrôle sur les exemples : pour $n = 7$, $2n + 1 = 15$ ✓ ; pour $n = 20$, $2n + 1 = 41$ ✓

Ce que le calcul littéral apporte ici. Vérifier mille exemples ne prouverait toujours rien ; une ligne de calcul avec une lettre traite tous les entiers à la fois. C'est exactement la différence entre constater et démontrer.

Réponse. b) les sommes sont impaires — c) $n + (n + 1) = 2n + 1$, impair pour tout n .

Correction de l'exercice 11 - La somme de trois entiers consécutifs

a) $4 + 5 + 6 = 15$; $10 + 11 + 12 = 33$; $25 + 26 + 27 = 78$.

b) On compare au nombre du milieu : $15 = 3 \times 5$, $33 = 3 \times 11$, $78 = 3 \times 26$. **La somme vaut trois fois le nombre du milieu** — elle est donc toujours un multiple de 3.

c) **La démonstration.** On appelle n le nombre du milieu ; les trois entiers consécutifs s'écrivent $n - 1$, n et $n + 1$. Leur somme vaut

$$(n - 1) + n + (n + 1) = 3n$$

Les termes -1 et $+1$ se compensent : il reste $3n$, trois fois le nombre du milieu, donc un multiple de 3.

Le choix de la lettre est stratégique. En appelant n le **premier** entier, on obtiendrait $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$: le résultat est le même, mais moins lisible. Bien choisir ce que désigne la lettre fait souvent toute la difficulté d'une démonstration.

Réponse. b) la somme vaut 3 fois le nombre du milieu — c) $(n - 1) + n + (n + 1) = 3n$.

Correction de l'exercice 12 - Un programme surprenant

a) **Avec 7 :** 14, puis 20, puis 10, puis 7.

Avec -4 : -8, puis -2, puis -1, puis -4.

Avec 0,5 : 1, puis 7, puis 3,5, puis 0,5.

b) **Conjecture.** Le programme redonne toujours le nombre de départ.

c) **Démonstration.** On suit les étapes avec une lettre x :

$$x \rightarrow 2x \rightarrow 2x + 6 \rightarrow \frac{2x + 6}{2} \rightarrow \frac{2x + 6}{2} - 3$$

On simplifie la division en factorisant le numérateur :

$$\frac{2x + 6}{2} = \frac{2(x + 3)}{2} = x + 3$$

La dernière étape donne $(x + 3) - 3 = x$. Le programme redonne donc **toujours** le nombre choisi, quel qu'il soit.

Le geste décisif. La factorisation $2x + 6 = 2(x + 3)$ permet de simplifier la fraction : sans elle, on ne peut pas diviser terme à terme le numérateur par 2 — enfin si, mais seulement parce que les deux termes sont pairs, ce qui est justement ce que la factorisation exprime.

Réponse. a) 7, -4 et 0,5 — b) le programme redonne le nombre choisi — c) le calcul littéral donne x .

Correction de l'exercice 13 - Le champ et sa clôture

a) **La formule du périmètre**, puis la réduction :

$$P = 2(\ell + (\ell + 30)) = 2(2\ell + 30) = 4\ell + 60$$

b) Pour $\ell = 45$: $P = 180 + 60 = 240$ m.

Contrôle direct : largeur 45 m, longueur 75 m, périmètre $2 \times 120 = 240$ m ✓

c) On cherche ℓ tel que $4\ell + 60 = 300$, donc $4\ell = 240$ et $\ell = 60$ m.

Vérification : largeur 60 m, longueur 90 m, périmètre $2 \times 150 = 300$ m ✓

Ce que la lettre permet. La question c) part du résultat pour remonter à la dimension : impossible sans expression littérale, sauf à tester des valeurs au hasard. C'est le premier pas vers la résolution d'équations, qui sera l'objet du chapitre suivant.

Réponse. a) $P = 4\ell + 60$ — b) 240 m — c) $\ell = 60$ m.

Correction de l'exercice 14 - Toujours positif ?

a) **Substitutions.**

— $x = 0$: $G = 0 + 1 = 1$;

— $x = 3$: $G = 9 + 1 = 10$;

— $x = -5$: $G = (-5)^2 + 1 = 25 + 1 = 26$.

b) **Non.** Un carré est toujours positif ou nul :

$$x^2 \geq 0 \quad \text{donc} \quad x^2 + 1 \geq 1$$

L'expression est donc toujours supérieure ou égale à 1 : elle ne peut jamais valoir 0, ni prendre de valeur négative.

c) La plus petite valeur est 1, atteinte pour $x = 0$ — c'est-à-dire lorsque le carré est le plus petit possible.

Le raisonnement à retenir. On ne teste pas des valeurs au hasard : on part de la propriété « un carré est positif ou nul », vraie pour tout nombre, et on en déduit l'encadrement. Aucun nombre de tests ne prouverait qu'il n'existe pas ailleurs une valeur négative ; le raisonnement littéral, si.

Réponse. a) 1, 10, 26 — b) non, car $x^2 \geq 0$ — c) minimum 1, pour $x = 0$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : le carré et son voisin

a) $25 - 24 = 1$; $81 - 80 = 1$; $144 - 143 = 1$.

b) **Conjecture.** Le carré d'un nombre dépasse toujours de 1 le produit de ses deux voisins.

c) **Démonstration.** On appelle n le nombre du milieu ; ses voisins sont $n - 1$ et $n + 1$. On calcule leur produit par double distributivité :

$$(n - 1)(n + 1) = n^2 + n - n - 1 = n^2 - 1$$

La différence cherchée vaut donc

$$n^2 - (n - 1)(n + 1) = n^2 - (n^2 - 1) = 1$$

C'est bien 1, **quel que soit** le nombre n — entier ou non, d'ailleurs.

Contrôle sur les exemples : pour $n = 12$, le produit des voisins vaut $144 - 1 = 143$ ✓

Le bilan de la plaquette. Trois exemples font naître une conjecture ; seule la lettre la transforme en certitude. Et le calcul est court : l'essentiel du travail a été de choisir n comme nombre du milieu plutôt que comme premier voisin.

Réponse. a) 1 dans les trois cas — b) l'écart vaut toujours 1 — c) $n^2 - (n - 1)(n + 1) = 1$.