

Plaque 5 - Bilan et problèmes

Calcul littéral — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les trois transformations du chapitre.

Geste	De quoi vers quoi	Règle
réduire	somme désordonnée vers somme rangée	$ax + bx = (a + b)x$
développer	produit vers somme	$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
factoriser	somme vers produit	$ka + kb = k(a + b)$

Quelle forme pour quelle question.

Question posée	Forme utile
calculer une valeur	celle qui demande le moins d'opérations
comparer deux expressions	développée et réduite
trouver quand l'expression s'annule	factorisée
démontrer une propriété	selon le cas, souvent factorisée

Traduire un énoncé.

Formulation	Écriture
le double de x , augmenté de 5	$2x + 5$
x augmenté de 5, puis doublé	$2(x + 5)$
un entier et son suivant	n et $n + 1$
un nombre pair, un nombre impair	$2n$ et $2n + 1$

Les trois règles, en clair.

$$ax + bx = (a + b)x \quad k(a + b) = ka + kb$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Le contrôle final, en trois questions. Le résultat est-il réduit ? Redonne-t-il l'expression de départ pour une valeur test ? Répond-il bien à la question posée ?

Correction de l'exercice 1 - Trois expressions à traiter

A — deux distributivités simples.

$$3(2x - 5) = 6x - 15 \quad 4(x + 1) = 4x + 4$$

D'où $A = 6x - 15 + 4x + 4 = 10x - 11$.

B — double distributivité, quatre produits :

$$(x + 4)(x - 2) = x^2 - 2x + 4x - 8 = x^2 + 2x - 8$$

C — distributivité puis réduction. $5x(x + 3) = 5x^2 + 15x$, donc

$$C = 5x^2 + 15x - 2x^2 = 3x^2 + 15x$$

Les contrôles, avec $x = 1$. $A = 3 \times (-3) + 4 \times 2 = -1$, et $10 - 11 = -1$ ✓
 $B = 5 \times (-1) = -5$, et $1 + 2 - 8 = -5$ ✓ $C = 5 \times 4 - 2 = 18$, et $3 + 15 = 18$ ✓

Remarque sur C. L'expression obtenue se factorise en $3x(x + 5)$: selon la question suivante, on garderait l'une ou l'autre écriture.

Réponse. $A = 10x - 11$, $B = x^2 + 2x - 8$, $C = 3x^2 + 15x$.

Correction de l'exercice 2 - Trois expressions à factoriser

La règle du cours.

$$ka + kb = k(a + b)$$

D. Le PGCD de 14 et 21 est 7 : $D = 7(2x + 3)$.

E. Le PGCD de 6 et 9 est 3, et y est commun :

$$E = 3y(2y - 3)$$

F. Le facteur commun est la parenthèse $(a - 3)$:

$$F = (a - 3)((a + 7) + 4) = (a - 3)(a + 11)$$

Les contrôles par développement. $7(2x + 3) = 14x + 21$ ✓ $3y(2y - 3) = 6y^2 - 9y$ ✓
 $(a - 3)(a + 11) = a^2 + 11a - 3a - 33 = a^2 + 8a - 33$, et l'expression de départ donne
 $(a^2 + 4a - 21) + (4a - 12) = a^2 + 8a - 33$ ✓

Ce que ces formes apportent. D s'annule pour $x = -\frac{3}{2}$, E pour $y = 0$ et $y = \frac{3}{2}$, F pour $a = 3$ et $a = -11$: autant d'informations invisibles sur les formes développées.

Réponse. $D = 7(2x + 3)$, $E = 3y(2y - 3)$, $F = (a - 3)(a + 11)$.

Correction de l'exercice 3 - Choisir la bonne écriture

a) La forme factorisée demande moins d'opérations :

$$K = x(x - 6)$$

Pour $x = 100$: $K = 100 \times 94 = 9400$. La forme développée exigerait
 $100^2 - 600 = 10\,000 - 600 = 9400$ ✓ — un carré de trois chiffres et une soustraction,
 contre une seule multiplication.

b) Un produit est nul quand l'un de ses facteurs l'est : $x = 0$ ou $x - 6 = 0$, donc $x = 0$ et $x = 6$.

c) **Oui.** Le produit $x(x - 6)$ est négatif quand les deux facteurs sont de signes contraires, c'est-à-dire pour x strictement compris entre 0 et 6. Par exemple pour $x = 2$:

$$K = 2 \times (-4) = -8$$

Le bilan. Trois questions, trois usages : la forme factorisée sert au calcul rapide, aux valeurs qui annulent et à l'étude du signe. La forme développée n'aurait facilité aucune des trois.

Réponse. a) 9400 — b) $x = 0$ et $x = 6$ — c) oui, par exemple $K(2) = -8$.

Correction de l'exercice 4 - Le carré et le rectangle

a) **Carré** : $A_1 = x^2$.

Rectangle : on développe par double distributivité :

$$A_2 = (x - 2)(x + 2) = x^2 + 2x - 2x - 4 = x^2 - 4$$

Les deux termes du milieu s'annulent.

b) La différence vaut

$$A_1 - A_2 = x^2 - (x^2 - 4) = 4$$

Le **carré** a donc toujours 4 cm² de plus que le rectangle, quelle que soit la valeur de x .

c) Pour $x = 10$: carré 100 cm², rectangle $8 \times 12 = 96$ cm², écart 4 cm² ✓

Ce que le résultat signifie. Allonger un côté de 2 cm et raccourcir l'autre d'autant **diminue** l'aire, toujours de la même quantité. À périmètre égal, c'est le carré qui a la plus grande aire — un résultat que ce calcul démontre dans ce cas particulier.

Réponse. a) x^2 et $x^2 - 4$ — b) le carré, de 4 cm² — c) 100 contre 96 cm².

Correction de l'exercice 5 - L'abonnement de sport

a) **Formule A** : $C_A = 8n$. **Formule B** : $C_B = 3n + 60$.

b) Pour $n = 10$: $C_A = 80$ € et $C_B = 30 + 60 = 90$ €. La formule A est meilleure.

Pour $n = 20$: $C_A = 160$ € et $C_B = 60 + 60 = 120$ €. La formule B est meilleure.

c) Les deux formules coûtent le même prix lorsque $8n = 3n + 60$, soit $5n = 60$ et $n = 12$.

Vérification : pour $n = 12$, $C_A = 96$ € et $C_B = 36 + 60 = 96$ € ✓

Au-delà de 12 séances, l'écart $C_A - C_B = 8n - (3n + 60) = 5n - 60$ devient positif : la formule B est alors plus avantageuse. Elle l'est donc **à partir de 13 séances**.

La lecture de l'expression $5n - 60$. Chaque séance supplémentaire creuse l'écart de 5 € en faveur de B ; l'abonnement de 60 € est « remboursé » après 12 séances. Tout le raisonnement tient dans cette différence.

Réponse. a) $8n$ et $3n + 60$ — b) (80; 90) puis (160; 120) — c) à partir de 13 séances.

Correction de l'exercice 6 - Somme de deux nombres pairs

a) $4 + 10 = 14$; $6 + 8 = 14$; $20 + 32 = 52$: les trois sommes sont paires.

b) **Démonstration.** Un nombre pair s'écrit $2n$ avec n entier. Deux nombres pairs quelconques s'écrivent donc $2n$ et $2p$, avec n et p entiers :

$$2n + 2p = 2(n + p)$$

Comme $n + p$ est un entier, la somme est le double d'un entier : elle est **paire**.

c) La somme d'un pair et d'un impair s'écrit $2n + (2p + 1)$:

$$2n + 2p + 1 = 2(n + p) + 1$$

C'est le double d'un entier, augmenté de 1 : la somme est **impaire**.

Le point de méthode. Il faut deux lettres différentes, n et p : écrire $2n + 2n$ ne parlerait que de deux nombres pairs **égaux**, un cas particulier. Choisir des lettres distinctes pour des nombres qui peuvent différer est une exigence de rigueur, pas une coquetterie.

Et la factorisation est le cœur de la preuve : c'est $2(n + p)$ qui montre que le résultat est pair.

Réponse. b) $2n + 2p = 2(n + p)$, pair — c) $2n + 2p + 1$ est impair.

Correction de l'exercice 7 - Le triangle et son aire

a) **La formule de l'aire d'un triangle** :

$$A = \frac{b \times h}{2} = \frac{2x \times (x + 3)}{2}$$

On simplifie par 2 avant de développer :

$$A = x(x + 3) = x^2 + 3x$$

b) Pour $x = 7$: $A = 49 + 21 = 70 \text{ cm}^2$.

Contrôle direct : base 14 cm, hauteur 10 cm, aire $\frac{14 \times 10}{2} = 70 \text{ cm}^2$ ✓

c) La forme factorisée $x(x + 3)$ s'annule pour $x = 0$ et $x = -3$. Mais une longueur est toujours strictement positive : $x = 0$ donnerait une base nulle et $x = -3$ des dimensions négatives. **Aucune des deux valeurs n'a de sens géométrique** : le triangle existe seulement pour $x > 0$.

Ce que l'exercice enseigne. L'algèbre livre parfois des solutions que le contexte rejette. Vérifier qu'une valeur est compatible avec l'énoncé fait partie de la résolution, au même titre que le calcul.

Réponse. a) $A = x^2 + 3x$ — b) 70 cm^2 — c) $x = 0$ et $x = -3$, sans signification géométrique.

Correction de l'exercice 8 - Comparer deux programmes

a) **Avec 5.** Programme 1 : $5 + 4 = 9$, puis 27. Programme 2 : 15, puis 27. Même résultat.

Avec -2. Programme 1 : 2, puis 6. Programme 2 : -6, puis 6. Même résultat encore.

b) **Programme 1** : $3(x + 4) = 3x + 12$. **Programme 2** : $3x + 12$.

c) Les deux expressions réduites sont **identiques** : les programmes donnent le même résultat pour **tout** nombre choisi, et pas seulement pour les deux testés.

Pourquoi la question b) était indispensable. Deux essais concordants ne prouvent rien : deux programmes différents peuvent coïncider sur quelques valeurs. Seule l'égalité des expressions réduites établit qu'ils sont équivalents partout. C'est la distinction entre vérifier et démontrer, au cœur de ce chapitre.

La règle en jeu, une fois de plus :

$$k(a + b) = ka + kb$$

Réponse. a) 27 puis 6 pour les deux — b) $3x + 12$ dans les deux cas — c) programmes équivalents.

Correction de l'exercice 9 - Le bassin et sa margelle

a) La margelle ajoute 1 m de chaque côté, donc 2 m à chaque dimension : l'ensemble mesure $x + 2$ sur $x + 7$.

b) **Aire de l'ensemble**, par double distributivité :

$$(x + 2)(x + 7) = x^2 + 7x + 2x + 14 = x^2 + 9x + 14$$

c) L'aire du bassin vaut $x(x + 5) = x^2 + 5x$. La margelle est la différence :

$$(x^2 + 9x + 14) - (x^2 + 5x) = 4x + 14$$

Sous forme factorisée : $2(2x + 7)$.

d) Pour $x = 4$: $4 \times 4 + 14 = 30 \text{ m}^2$.

Vérification par les aires : ensemble $6 \times 11 = 66 \text{ m}^2$, bassin $4 \times 9 = 36 \text{ m}^2$, margelle 30 m^2 ✓

Le contrôle par le découpage. La margelle se compose de deux bandes de x , deux bandes de $x + 5$ et quatre coins de 1 m^2 , soit $2x + 2(x + 5) + 4 = 4x + 14$ ✓ — la même expression, obtenue par un chemin entièrement géométrique.

Réponse. a) $x + 2$ et $x + 7$ — b) $x^2 + 9x + 14$ — c) $4x + 14 = 2(2x + 7)$ — d) 30 m^2 .

Correction de l'exercice 10 - Une expression constante

a) **Premier terme.** $(x + 4)^2 = (x + 4)(x + 4) = x^2 + 4x + 4x + 16 = x^2 + 8x + 16$.

Second terme. $(x + 3)(x + 5) = x^2 + 5x + 3x + 15 = x^2 + 8x + 15$.

b) On soustrait, en changeant tous les signes du second :

$$L = (x^2 + 8x + 16) - (x^2 + 8x + 15) = 1$$

L'expression vaut 1 **quelle que soit** la valeur de x .

c) Pour $x = 0$: $L = 16 - 15 = 1$ ✓ Pour $x = 10$: $L = 14^2 - 13 \times 15 = 196 - 195 = 1$ ✓

Le lien avec un résultat connu. On retrouve la propriété du carré et de ses voisins : $n^2 - (n - 1)(n + 1) = 1$, ici avec $n = x + 4$. Reconnaître cette structure permet de conclure sans développer.

Le piège classique. Oublier de changer le signe du 15 donnerait $L = 31$: le test avec $x = 0$ le détecte aussitôt.

Réponse. b) $L = 1$ pour toute valeur de x — c) 1 dans les deux cas.

Correction de l'exercice 11 - Les billets de tombola

a) Les billets du samedi rapportent $40x$, ceux du dimanche $25(x - 1)$:

$$R = 40x + 25(x - 1) = 40x + 25x - 25 = 65x - 25$$

b) Pour $x = 3$: $R = 195 - 25 = 170$ €.

Contrôle direct : $40 \times 3 = 120$ € le samedi, $25 \times 2 = 50$ € le dimanche, total 170 € ✓

c) On cherche x tel que $65x - 25 = 155$, donc $65x = 180$ et $x = \frac{180}{65} = \frac{36}{13} \approx 2,77$ €.

Un prix de billet de 2,77 € n'étant guère réaliste, on peut remarquer que pour $x = 2,50$ € la recette vaut $65 \times 2,5 - 25 = 137,50$ €, et pour $x = 3$ € elle vaut 170 € : aucun prix « rond » ne donne exactement 155 €.

Ce qu'il faut retenir. L'expression littérale permet aussi de **tester la cohérence** d'un énoncé : ici, elle montre que le montant annoncé n'est pas compatible avec un prix de billet usuel.

Réponse. a) $R = 65x - 25$ — b) 170 € — c) $x = \frac{36}{13} \approx 2,77$ €, prix peu réaliste.

Correction de l'exercice 12 - Deux carrés emboîtés

a) **Grand carré.** $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$.

Petit carré. x^2 .

Zone intermédiaire, par différence :

$$(x^2 + 8x + 16) - x^2 = 8x + 16$$

Sous forme factorisée : $8(x + 2)$.

b) Pour $x = 6$: $8 \times 8 = 64$ cm².

Contrôle : grand carré $10 \times 10 = 100$ cm², petit carré 36 cm², différence 64 cm² ✓

c) On cherche x tel que $8(x + 2) = 100$, donc $x + 2 = 12,5$ et $x = 10,5$ cm.

Vérification : grand carré $14,5^2 = 210,25$ cm², petit carré 110,25 cm², différence 100 cm² ✓

L'intérêt de la forme factorisée en c). Diviser par 8 d'un coup est plus rapide que de

résoudre $8x + 16 = 100$; et la forme $8(x + 2)$ montre que l'aire de la zone croît de 8 cm^2 par centimètre ajouté au côté intérieur.

Réponse. a) $8x + 16 = 8(x + 2)$ — b) 64 cm^2 — c) oui, pour $x = 10,5 \text{ cm}$.

Correction de l'exercice 13 - Le produit de deux impairs

a) 15 ; 63 ; 143.

b) Les trois résultats sont **impairs**.

c) **Démonstration.** Deux nombres impairs quelconques s'écrivent $2n + 1$ et $2p + 1$, avec n et p entiers. On développe leur produit :

$$(2n + 1)(2p + 1) = 4np + 2n + 2p + 1$$

On factorise les trois premiers termes par 2 :

$$4np + 2n + 2p + 1 = 2(2np + n + p) + 1$$

Comme $2np + n + p$ est un entier, le produit est le double d'un entier augmenté de 1 : il est **impair**, quels que soient n et p .

Contrôle sur un exemple. Pour 7×9 : $n = 3$ et $p = 4$, donc $2np + n + p = 24 + 3 + 4 = 31$, et $2 \times 31 + 1 = 63$ ✓

Les deux gestes du chapitre réunis. La double distributivité produit l'expression, la factorisation par 2 révèle sa nature. Aucune des deux ne suffit seule.

Réponse. b) les produits sont impairs — c) $(2n + 1)(2p + 1) = 2(2np + n + p) + 1$.

Correction de l'exercice 14 - Le réservoir qui se vide

a) Le volume diminue de 12 litres par minute à partir de 500 litres :

$$V = 500 - 12t$$

b) Pour $t = 10$: $V = 500 - 120 = 380 \text{ L}$. Pour $t = 30$: $V = 500 - 360 = 140 \text{ L}$.

c) Le réservoir est vide quand $V = 0$, soit $500 - 12t = 0$, donc $12t = 500$ et

$$t = \frac{500}{12} = \frac{125}{3} \approx 41,7 \text{ min}$$

soit environ 41 min 40 s.

d) Pour $t = 50$, l'expression donne $V = 500 - 600 = -100 \text{ L}$: un volume **négatif**, ce qui n'a aucun sens physique. La formule n'est valable que tant que le réservoir contient de l'eau, c'est-à-dire pour t compris entre 0 et $\frac{125}{3}$ minutes.

La leçon. Une expression littérale modélise une situation sur un domaine limité. Le calcul continue de fonctionner au-delà, mais le résultat cesse de décrire la réalité : c'est au lecteur de fixer les bornes.

Réponse. a) $V = 500 - 12t$ — b) 380 L puis 140 L — c) environ 41 min 40 s — d) non, V deviendrait négatif.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : une expression sous trois angles

a) Le facteur commun est $(3x + 2)$, le second terme valant $(3x + 2) \times 1$:

$$M = (3x + 2)((x - 1) - 1) = (3x + 2)(x - 2)$$

b) **Développement** de la forme factorisée :

$$(3x + 2)(x - 2) = 3x^2 - 6x + 2x - 4 = 3x^2 - 4x - 4$$

c) Un produit est nul quand l'un de ses facteurs l'est : $3x + 2 = 0$ donne $x = -\frac{2}{3}$, et $x - 2 = 0$ donne $x = 2$.

Vérification pour $x = 2$: $M = 8 \times 1 - 8 = 0$ ✓

d) Avec la forme factorisée : $M = 17 \times 3 = 51$. Avec la forme développée : $3 \times 25 - 20 - 4 = 75 - 24 = 51$ ✓

Le bilan du chapitre. Une même expression, trois écritures, trois usages : la somme de produits est celle de l'énoncé, la forme factorisée donne les valeurs qui annulent et accélère les calculs, la forme développée range les termes par degré. Savoir passer de l'une à l'autre — et savoir laquelle choisir — est l'objectif du calcul littéral.

Réponse. a) $M = (3x + 2)(x - 2)$ — b) $3x^2 - 4x - 4$ — c) $x = -\frac{2}{3}$ et $x = 2$ — d) $M = 51$.