

Plaquette 2 – Calculer le cosinus d'un angle

Cosinus d'un angle aigu — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

La définition. Pour un angle aigu d'un triangle rectangle :

$$\cos(\text{angle}) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

Méthode.

- repérer l'angle droit, donc l'hypoténuse ;
- repérer le côté adjacent à l'angle étudié ;
- écrire la fraction, puis la valeur décimale demandée.

Encadrement. Pour tout angle aigu : $0 < \cos < 1$. Un résultat supérieur à 1 signale une inversion du quotient.

Quand l'hypoténuse n'est pas donnée, on la calcule d'abord avec le théorème de Pythagore. Dans un triangle rectangle en A :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Arrondis. « Au centième » = deux chiffres après la virgule. On garde la **fraction exacte** dans la ligne de calcul et on n'arrondit qu'à la fin.

Sens de variation. Plus l'angle aigu est grand, plus son cosinus est **petit** :
 $\cos(20^\circ) \approx 0,94$ alors que $\cos(70^\circ) \approx 0,34$.

Deux valeurs repères. $\cos(60^\circ) = 0,5$ exactement, et $\cos(45^\circ) \approx 0,71$.

Correction de l'exercice 1 - Application directe

L'angle droit est en A, donc l'hypoténuse est [BC]. Pour l'angle de sommet B, le côté adjacent est [AB]. D'après la définition du cosinus :

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC}$$

- On remplace : $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{3}{5}$.
- On calcule : $3 \div 5 = 0,6$.

Donc $\cos(\widehat{ABC}) = 0,6$.

Contrôle. $0 < 0,6 < 1$ ✓ La valeur est acceptable.

Réponse. $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{3}{5} = 0,6$.

Correction de l'exercice 2 - Un résultat à arrondir

L'hypoténuse est [BC] (opposée à l'angle droit en A) et l'adjacent à l'angle de sommet B est [AB] :

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC} = \frac{8}{17}$$

- À la calculatrice : $8 \div 17 \approx 0,4705$.
- Arrondi au centième : $\cos(\widehat{ABC}) \approx 0,47$.

Rédaction. La valeur exacte est la fraction $\frac{8}{17}$: on l'écrit avec un signe $=$, et on réserve le signe $\approx$ à la valeur arrondie.

Réponse. $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{8}{17} \approx 0,47$.

Correction de l'exercice 3 - L'angle de l'autre sommet

L'angle droit est en R : l'hypoténuse est $[ST]$, de longueur 13 cm.

Angle de sommet S : les côtés partant de S sont $[ST]$ (hypoténuse) et $[SR]$, donc l'adjacent est $[RS]$.

$$\cos(\widehat{RST}) = \frac{RS}{ST} = \frac{5}{13} \approx 0,38$$

Angle de sommet T : l'adjacent est $[RT]$.

$$\cos(\widehat{RTS}) = \frac{RT}{ST} = \frac{12}{13} \approx 0,92$$

Interprétation. Le second cosinus est bien plus grand : l'angle $\widehat{RTS}$ est donc bien plus petit que $\widehat{RST}$. La figure le confirme.

Réponse. $\frac{5}{13} \approx 0,38$ et $\frac{12}{13} \approx 0,92$.

Correction de l'exercice 4 - Calculer l'hypoténuse d'abord

a) Le cosinus a besoin de l'hypoténuse, qui n'est pas donnée : on la calcule d'abord. Le triangle est rectangle en A , d'hypoténuse $[BC]$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$— BC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

$$— BC = \sqrt{100} = 10, \text{ donc } BC = 10 \text{ cm.}$$

b) L'adjacent à l'angle de sommet B est $[AB]$:

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} = 0,6$$

Méthode à retenir. Quand l'hypoténuse manque, Pythagore d'abord, cosinus ensuite. Les deux outils du chapitre se complètent.

Réponse. a) $BC = 10$ cm — b) $\cos(\widehat{ABC}) = 0,6$.

Correction de l'exercice 5 - Avec des décimaux

L'angle droit est en D : l'hypoténuse est $[EF]$, de longueur 2,6 cm. Pour l'angle de sommet E , l'adjacent est $[DE]$:

$$\cos(\widehat{DEF}) = \frac{DE}{EF} = \frac{2,4}{2,6}$$

$$— \text{À la calculatrice : } 2,4 \div 2,6 \approx 0,9230.$$

$$— \text{Arrondi au centième : } \cos(\widehat{DEF}) \approx 0,92.$$

Contrôle. Le cosinus est très proche de 1 : l'angle est donc très petit. C'est cohérent, puisque le côté adjacent (2,4 cm) est presque aussi long que l'hypoténuse (2,6 cm).

Réponse. $\cos(\widehat{DEF}) = \frac{2,4}{2,6} \approx 0,92$.

Correction de l'exercice 6 - Simplifier la fraction

L'hypoténuse est $[HI]$ et l'adjacent à l'angle de sommet H est $[GH]$:

$$\cos(\widehat{GHI}) = \frac{GH}{HI} = \frac{4,5}{7,5}$$

Pour simplifier, on multiplie numérateur et dénominateur par 10 :

$$- \frac{4,5}{7,5} = \frac{45}{75}$$

$$- \text{En divisant les deux par 15 : } \frac{45}{75} = \frac{3}{5}$$

— Soit 0,6 exactement.

Donc $\cos(\widehat{GHI}) = 0,6$.

Remarque. C'est le même cosinus que dans un triangle 3-4-5 : cet angle mesure toujours environ 53° , quelle que soit la taille du triangle. Le cosinus ne dépend que de l'angle, pas des dimensions.

Réponse. $\cos(\widehat{GHI}) = \frac{3}{5} = 0,6$.

Correction de l'exercice 7 - Deux triangles semblables

Premier triangle. L'hypoténuse est $[BC]$, l'adjacent à l'angle de sommet B est $[AB]$:

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} = 0,6$$

Second triangle. De même :

$$\cos(\widehat{A'B'C'}) = \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{9}{15}$$

$$- \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \text{ en divisant les deux termes par 3}$$

— soit 0,6.

Les deux cosinus sont **égaux**.

Ce que cela signifie. Le second triangle est un agrandissement du premier (toutes les longueurs multipliées par 3). Le cosinus ne dépend **que de l'angle**, pas de la taille du triangle : c'est ce qui permet d'avoir une seule touche « cos » sur la calculatrice.

Réponse. Les deux valent 0,6 : le cosinus ne dépend que de l'angle.

Correction de l'exercice 8 - Corriger un calcul faux

Le résultat annoncé, 3,57, est supérieur à 1 : c'est impossible pour le cosinus d'un angle aigu. L'élève a inversé le quotient.

L'angle droit est en J , donc l'hypoténuse est $[KL]$: elle doit être au **dénominateur**.
L'adjacent à l'angle de sommet K est $[JK]$:

$$\cos(\widehat{JKL}) = \frac{JK}{KL} = \frac{7}{25}$$

$$- 7 \div 25 = 0,28$$

Donc $\cos(\widehat{JKL}) = 0,28$.

Le réflexe qui sauve. Un cosinus supérieur à 1 n'existe pas : il suffit de regarder le résultat pour repérer l'inversion.

Réponse. Quotient inversé : $\cos(\widehat{JKL}) = \frac{7}{25} = 0,28$.

Correction de l'exercice 9 - Dans un rectangle

a) Le triangle ABC est rectangle en B (angle du rectangle), d'hypoténuse $[AC]$:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$— AC^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$$

$$— AC = \sqrt{169} = 13, \text{ donc } AC = 13 \text{ cm.}$$

b) Dans ce triangle, l'hypoténuse est $[AC]$ et l'adjacent à l'angle de sommet A est $[AB]$:

$$\cos(\hat{BAC}) = \frac{AB}{AC} = \frac{12}{13} \approx 0,9230$$

Arrondi au centième : $\cos(\hat{BAC}) \approx 0,92$.

Interprétation. Le rectangle est très allongé : la diagonale est presque parallèle au grand côté, l'angle est donc petit et son cosinus proche de 1.

Réponse. a) $AC = 13 \text{ cm}$ — b) $\cos(\hat{BAC}) = \frac{12}{13} \approx 0,92$.

Correction de l'exercice 10 - Comparer deux angles

Le cosinus s'écrit :

$$\cos = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

Plus l'angle est grand, plus le côté adjacent est court par rapport à l'hypoténuse : le quotient diminue. Le cosinus **décroît** donc quand l'angle aigu augmente.

Comme $0,35 < 0,82$, c'est le **premier** angle qui est le plus grand.

Repères utiles. $\cos(60^\circ) = 0,5$. Le premier cosinus est inférieur à 0,5 : l'angle dépasse 60° . Le second est nettement supérieur : l'angle est bien inférieur à 60° .

Réponse. Le premier (cosinus 0,35), car le cosinus décroît quand l'angle augmente.

Correction de l'exercice 11 - Le cosinus de 60 degrés

Dans un triangle équilatéral, les trois angles mesurent 60° : l'angle $\hat{ABH}$ mesure donc 60° .

Comme H est le milieu de $[BC]$:

$$— BH = \frac{6}{2} = 3, \text{ soit } BH = 3 \text{ cm.}$$

Le triangle ABH est rectangle en H : l'hypoténuse est $[AB]$ (6 cm), et l'adjacent à l'angle de sommet B est $[BH]$ (3 cm).

$$\cos(\hat{ABH}) = \frac{BH}{AB} = \frac{3}{6} = 0,5$$

On vient de démontrer la valeur remarquable du cours :

$$\cos(60^\circ) = 0,5$$

À retenir. C'est la seule valeur exacte simple du programme de Quatrième ; elle permet de contrôler un résultat de tête.

Réponse. $\cos(\hat{ABH}) = 0,5$, donc $\cos(60^\circ) = 0,5$.

Correction de l'exercice 12 - Lire la figure et calculer

Lecture de la figure. Le carré codé en M indique que le triangle MNP est rectangle en M : l'hypoténuse est $[NP]$, de longueur 5 cm (bien la plus grande).

L'angle marqué a pour sommet N ; les côtés partant de N sont $[NP]$ (hypoténuse) et $[NM]$: l'adjacent est $[MN]$, de longueur 4,8 cm.

$$\cos(\widehat{MNP}) = \frac{MN}{NP} = \frac{4,8}{5}$$

$$— 4,8 \div 5 = 0,96$$

Donc $\cos(\widehat{MNP}) = 0,96$.

La longueur $MP = 1,4$ cm est le côté opposé : elle ne sert pas ici.

Contrôle. Le cosinus est très proche de 1, donc l'angle est très petit — ce que confirme la forme aplatie du triangle.

Réponse. $\cos(\widehat{MNP}) = \frac{4,8}{5} = 0,96$.

Correction de l'exercice 13 - La pente d'un toit

La verticale du faîtage et l'horizontale se coupent à angle droit : le triangle PBS est rectangle en P . Le chevron $[BS]$ en est l'hypoténuse (4,5 m) et sa projection horizontale $[PB]$ est le côté adjacent à l'angle de sommet B (3,6 m).

$$\cos(\widehat{PBS}) = \frac{PB}{BS} = \frac{3,6}{4,5}$$

$$— 3,6 \div 4,5 = 0,8$$

Le cosinus de l'angle du chevron avec l'horizontale vaut 0,8.

Interprétation. Ce cosinus correspond à un angle d'environ 37° : c'est une pente de toit courante.

Réponse. $\cos = \frac{3,6}{4,5} = 0,8$.

Correction de l'exercice 14 - Deux étapes

a) Le triangle est rectangle en A , d'hypoténuse $[BC]$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$— BC^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$$

$$— BC = \sqrt{225} = 15, \text{ donc } BC = 15 \text{ cm.}$$

b) L'hypoténuse est $[BC] = 15$ cm.

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC} = \frac{9}{15} = 0,6$$

$$\cos(\widehat{ACB}) = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{15} = 0,8$$

c) Le cosinus décroît quand l'angle augmente : le plus **grand** cosinus correspond au plus **petit** angle. Comme $0,8 > 0,6$, le plus petit angle est $\widehat{ACB}$.

Contrôle. Le plus petit angle est opposé au plus petit côté : $\widehat{ACB}$ est opposé à $[AB] = 9$ cm, le plus court des deux côtés de l'angle droit ✓

Réponse. a) 15 cm — b) 0,6 et 0,8 — c) $\widehat{ACB}$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : quatre cosinus

Dans chaque cas : l'hypoténuse (opposée à l'angle droit) au dénominateur, l'adjacent au numérateur.

a) Hypoténuse $[BC]$, adjacent $[AB]$:

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{20}{29} \approx 0,69$$

b) Hypoténuse $[DF]$, adjacent à l'angle de sommet F : $[EF]$.

$$\cos(\widehat{DFE}) = \frac{1,2}{2,5} = 0,48$$

c) Hypoténuse $[GI]$, adjacent à l'angle de sommet G : $[GH]$.

$$\cos(\widehat{HGI}) = \frac{15}{17} \approx 0,88$$

d) Hypoténuse $[KM]$, adjacent à l'angle de sommet K : $[KL]$.

$$\cos(\widehat{LKM}) = \frac{3}{6} = 0,5$$

Remarque sur d). Un cosinus de 0,5 signale un angle de 60° : c'est la valeur remarquable du cours.

Réponse. a) $\approx 0,69$ — b) 0,48 — c) $\approx 0,88$ — d) 0,5.