

Plaquette 3 – Calculer une longueur avec le cosinus

Cosinus d'un angle aigu – Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

La définition, toujours la même :

$$\cos(\text{angle}) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

Les deux cas.

On cherche	L'inconnue est	Opération	Formule
le côté adjacent	au numérateur	multiplication	$\text{adj} = \text{hyp} \times \cos(\text{angle})$
l'hypoténuse	au dénominateur	division	$\text{hyp} = \frac{\text{adj}}{\cos(\text{angle})}$

Méthode.

- repérer l'angle droit, l'hypoténuse, le côté adjacent à l'angle donné ;
- écrire l'égalité du cosinus avec les données ;
- isoler l'inconnue par un produit en croix ;
- calculer **sans arrondir en cours de route**, puis arrondir à la fin.

Calculatrice. Vérifier le mode **DEG** (degrés). En mode radian, $\cos(35)$ donne $-0,9$ au lieu de $0,82$: un résultat négatif ou aberrant vient presque toujours de là.

Contrôles de vraisemblance.

- le côté adjacent est **plus court** que l'hypoténuse ;
- l'hypoténuse est **plus longue** que l'adjacent ;
- un cosinus proche de 1 donne un adjacent presque égal à l'hypoténuse.

Valeurs repères pour contrôler : $\cos(20^\circ) \approx 0,94$; $\cos(45^\circ) \approx 0,71$; $\cos(60^\circ) = 0,5$; $\cos(75^\circ) \approx 0,26$.

Correction de l'exercice 1 – Chercher le côté adjacent

L'angle droit est en A : l'hypoténuse est [BC] (10 cm, connue). L'adjacent à l'angle de sommet B est [AB] : c'est l'inconnue, elle est au **numérateur**.

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC}$$

- On remplace : $\cos(35^\circ) = \frac{AB}{10}$.
- Produit en croix : $AB = 10 \times \cos(35^\circ)$.
- À la calculatrice (mode degré) : $AB \approx 10 \times 0,8192 \approx 8,19$.

Arrondi au dixième : $AB \approx 8,2$ cm.

Contrôle. $8,2 < 10$: le côté adjacent est bien plus court que l'hypoténuse ✓

Réponse. $AB = 10 \times \cos(35^\circ) \approx 8,2$ cm.

Correction de l'exercice 2 - Chercher l'hypoténuse

L'angle droit est en D : l'hypoténuse est $[EF]$, et c'est **l'inconnue**. L'adjacent à l'angle de sommet E est $[DE]$ (6 cm, connu).

$$\cos(\widehat{DEF}) = \frac{DE}{EF}$$

- On remplace : $\cos(40^\circ) = \frac{6}{EF}$.
- Produit en croix : $EF \times \cos(40^\circ) = 6$.
- On isole : $EF = \frac{6}{\cos(40^\circ)}$.
- À la calculatrice : $EF \approx \frac{6}{0,766} \approx 7,83$.

Arrondi au dixième : $EF \approx 7,8$ cm.

Contrôle. $7,8 > 6$: l'hypoténuse est bien la plus longue ✓ Si l'on avait multiplié au lieu de diviser, on aurait trouvé 4,6 cm, plus court que l'adjacent : impossible.

Réponse. $EF = \frac{6}{\cos(40^\circ)} \approx 7,8$ cm.

Correction de l'exercice 3 - Reconnaître le bon cas

a) L'angle droit est en G , donc l'hypoténuse est $[HI]$ — et elle est **connue** (8 cm). L'adjacent à l'angle de sommet H est $[GH]$: c'est l'inconnue, elle se trouve au **numérateur**. On multipliera donc.

b) On écrit la définition :

$$\cos(\widehat{GHI}) = \frac{GH}{HI}$$

- $\cos(50^\circ) = \frac{GH}{8}$
- $GH = 8 \times \cos(50^\circ)$
- $GH \approx 8 \times 0,6428 \approx 5,14$

Arrondi au dixième : $GH \approx 5,1$ cm.

La question a) est la vraie question. Une fois repéré si l'inconnue est en haut ou en bas, le calcul se fait tout seul.

Réponse. a) au numérateur — b) $GH \approx 5,1$ cm.

Correction de l'exercice 4 - Un angle proche de zéro

L'angle droit est en J : l'hypoténuse est $[KL]$, l'inconnue. L'adjacent à l'angle de sommet K est $[JK]$ (30 cm).

$$\cos(\widehat{JKL}) = \frac{JK}{KL}$$

- $\cos(12^\circ) = \frac{30}{KL}$
- $KL = \frac{30}{\cos(12^\circ)}$
- $KL \approx \frac{30}{0,9781} \approx 30,67$

Arrondi au dixième : $KL \approx 30,7$ cm.

Interprétation. L'angle est petit, donc son cosinus est proche de 1 : l'hypoténuse est à peine plus longue que le côté adjacent. Un résultat très différent de 30 cm aurait signalé

une erreur.

Réponse. $KL = \frac{30}{\cos(12^\circ)} \approx 30,7 \text{ cm.}$

Correction de l'exercice 5 - Avec des décimaux

L'hypoténuse est $[NP]$ (6,5 cm) et l'inconnue MN est le côté adjacent à l'angle de sommet N : elle est au numérateur.

$$\cos(\widehat{MNP}) = \frac{MN}{NP}$$

$$\text{— } \cos(25^\circ) = \frac{MN}{6,5}$$

$$\text{— } MN = 6,5 \times \cos(25^\circ)$$

$$\text{— } MN \approx 6,5 \times 0,9063 \approx 5,891$$

Arrondi au millimètre (deux décimales en cm) : $MN \approx 5,89 \text{ cm.}$

Contrôle. $5,89 < 6,5 \checkmark$ et l'angle étant assez petit, l'écart entre les deux longueurs est faible, ce qui est cohérent.

Réponse. $MN \approx 5,89 \text{ cm.}$

Correction de l'exercice 6 - Angle de 60 degrés

L'hypoténuse est $[ST]$ (12 cm) et l'adjacent à l'angle de sommet S est $[RS]$, l'inconnue.

$$\cos(\widehat{RST}) = \frac{RS}{ST}$$

$$\text{— } \cos(60^\circ) = \frac{RS}{12}$$

Or $\cos(60^\circ) = 0,5$, c'est la valeur remarquable du cours :

$$\text{— } 0,5 = \frac{RS}{12}$$

$$\text{— } RS = 12 \times 0,5$$

$$\text{— } RS = 6$$

La longueur RS vaut exactement 6 cm.

À retenir. Un angle de 60° donne un côté adjacent égal à la **moitié** de l'hypoténuse. C'est aussi la propriété du triangle équilatéral coupé en deux.

Réponse. $RS = 6 \text{ cm.}$

Correction de l'exercice 7 - Deux inconnues, deux outils

a) L'hypoténuse est $[VW]$ (15 cm) et $[UV]$ est le côté adjacent à l'angle de sommet V :

$$\cos(\widehat{UVW}) = \frac{UV}{VW}$$

$$\text{— } \cos(62^\circ) = \frac{UV}{15}$$

$$\text{— } UV = 15 \times \cos(62^\circ)$$

$$\text{— } UV \approx 15 \times 0,4695 \approx 7,042$$

Soit $UV \approx 7,0 \text{ cm.}$

b) Le triangle est rectangle en U , d'hypoténuse $[VW]$:

$$VW^2 = UV^2 + UW^2$$

$$\text{— } 15^2 = 7,042^2 + UW^2$$

- $225 \approx 49,59 + UW^2$
- $UW^2 \approx 175,41$
- $UW \approx \sqrt{175,41} \approx 13,24$

Soit $UW \approx 13,2$ cm.

Précision. On utilise la valeur **non arrondie** de UV dans Pythagore. Avec 7,0 on trouverait 13,27 : l'écart se voit dès le dixième.

Réponse. a) $UV \approx 7,0$ cm — b) $UW \approx 13,2$ cm.

Correction de l'exercice 8 - L'échelle et le mur

Le mur est vertical, le sol horizontal : le triangle PSH est rectangle en P , et l'échelle $[SH]$ en est l'hypoténuse.

L'angle de 20° est celui de sommet H , entre le mur et l'échelle. Pour cet angle :

- le côté adjacent est $[PH]$ (le mur) — inconnu ;
- le côté opposé est $[PS]$ (2,5 m) — connu ;
- l'hypoténuse est $[SH]$ — cherchée.

Le cosinus ne relie que l'adjacent et l'hypoténuse : il faut donc changer d'angle. Dans le triangle, les deux angles aigus sont complémentaires :

$$\text{— } \widehat{PSH} = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$$

Pour l'angle de sommet S , le côté adjacent est $[PS]$ (2,5 m) et l'hypoténuse est $[SH]$:

$$\cos(\widehat{PSH}) = \frac{PS}{SH}$$

- $\cos(70^\circ) = \frac{2,5}{SH}$
- $SH = \frac{2,5}{\cos(70^\circ)}$
- $SH \approx \frac{2,5}{0,342} \approx 7,31$

L'échelle mesure environ 7,31 m.

Le vrai piège de l'exercice. L'angle donné n'est pas toujours celui qui arrange : quand la donnée connue est le côté **opposé**, on passe à l'angle complémentaire, pour lequel elle devient adjacente.

Réponse. L'échelle mesure environ 7,31 m.

Correction de l'exercice 9 - Le câble du téléphérique

En notant D le départ, A l'arrivée et P le point situé à la verticale de A au niveau du départ, le triangle DPA est rectangle en P (vertical contre horizontal).

- l'angle de 30° est celui de sommet D ;
- son côté adjacent est la projection horizontale $[DP]$ (4,2 km) ;
- l'hypoténuse est le câble $[DA]$, l'inconnue.

$$\cos(\widehat{PDA}) = \frac{DP}{DA}$$

- $\cos(30^\circ) = \frac{4,2}{DA}$
- $DA = \frac{4,2}{\cos(30^\circ)}$
- $DA \approx \frac{4,2}{0,8660} \approx 4,8497$

Le câble mesure environ 4,850 km, soit environ 4850 m.

Contrôle. Le câble est plus long que sa projection au sol : c'est toujours le cas, et l'écart est ici d'environ 650 m.

Réponse. Environ 4850 m.

Correction de l'exercice 10 - La rampe d'accès

La rampe est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont un côté est horizontal et l'autre vertical. L'angle de 6° est celui entre la rampe et l'horizontale : son côté adjacent est justement la distance horizontale cherchée, notée d .

$$\cos(6^\circ) = \frac{d}{12}$$

$$- d = 12 \times \cos(6^\circ)$$

$$- d \approx 12 \times 0,9945 \approx 11,934$$

La rampe occupe environ 11,93 m au sol.

Interprétation. Pour une pente aussi faible, la distance au sol est presque égale à la longueur de la rampe : la différence n'est que de 7 cm environ.

Réponse. Environ 11,93 m.

Correction de l'exercice 11 - Compléter une figure

Lecture de la figure. Le carré codé en S indique que le triangle RST est rectangle en S : l'hypoténuse est $[RT]$, qui mesure 3,4 cm. L'angle marqué, de 48° , a pour sommet R .

Pour cet angle, le côté adjacent est $[RS]$: c'est l'inconnue, au numérateur.

$$\cos(\widehat{SRT}) = \frac{RS}{RT}$$

$$- \cos(48^\circ) = \frac{RS}{3,4}$$

$$- RS = 3,4 \times \cos(48^\circ)$$

$$- RS \approx 3,4 \times 0,6691 \approx 2,275$$

Soit $RS \approx 2,3$ cm.

Contrôle. $2,3 < 3,4$ ✓ et l'angle étant proche de 45° , l'adjacent vaut environ 0,7 fois l'hypoténuse : $3,4 \times 0,7 \approx 2,4$, on est bien dans l'ordre de grandeur.

Réponse. $RS \approx 2,3$ cm.

Correction de l'exercice 12 - Deux longueurs à trouver

a) L'angle droit est en A : l'hypoténuse est $[BC]$, l'inconnue. L'adjacent à l'angle de sommet B est $[AB]$ (12 cm).

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC}$$

$$- \cos(55^\circ) = \frac{12}{BC}$$

$$- BC = \frac{12}{\cos(55^\circ)}$$

$$- BC \approx \frac{12}{0,5736} \approx 20,92$$

Soit $BC \approx 20,9$ cm.

b) La somme des angles d'un triangle vaut 180° . Le triangle a un angle droit :

$$- \hat{ACB} = 180^\circ - 90^\circ - 55^\circ$$

$$- \hat{ACB} = 35^\circ$$

Propriété utile. Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont **complémentaires** : leur somme vaut 90° .

Réponse. a) $BC \approx 20,9$ cm — b) $\hat{ACB} = 35^\circ$.

Correction de l'exercice 13 - Le cerf-volant

En notant S la personne, P le point du sol à la verticale du cerf-volant et C le cerf-volant, le triangle SPC est rectangle en P .

- l'angle de 65° est celui de sommet S , entre la ficelle et le sol ;
- son côté adjacent est $[SP]$ (18 m) ;
- l'hypoténuse est la ficelle $[SC]$, l'inconnue.

$$\cos(\hat{PSC}) = \frac{SP}{SC}$$

$$- \cos(65^\circ) = \frac{18}{SC}$$

$$- SC = \frac{18}{\cos(65^\circ)}$$

$$- SC \approx \frac{18}{0,4226} \approx 42,59$$

Il y a environ 42,6 m de ficelle déroulée.

Contrôle. L'angle dépasse 60° , donc le cosinus est inférieur à 0,5 : la ficelle mesure plus du double de la distance au sol ✓

Réponse. Environ 42,6 m de ficelle.

Correction de l'exercice 14 - Le rectangle et sa diagonale

a) Le triangle ABC est rectangle en B : l'hypoténuse est la diagonale $[AC]$ (20 cm). L'angle de 28° a pour sommet A , et son côté adjacent est $[AB]$.

$$\cos(\hat{BAC}) = \frac{AB}{AC}$$

$$- \cos(28^\circ) = \frac{AB}{20}$$

$$- AB = 20 \times \cos(28^\circ)$$

$$- AB \approx 20 \times 0,8829 \approx 17,66$$

Soit $AB \approx 17,7$ cm.

b) Dans le triangle ABC rectangle en B :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$- 20^2 \approx 17,66^2 + BC^2$$

$$- 400 \approx 311,9 + BC^2$$

$$- BC^2 \approx 88,1$$

$$- BC \approx \sqrt{88,1} \approx 9,39$$

Soit $BC \approx 9,4$ cm.

Contrôle. Le rectangle mesure environ 17,7 cm sur 9,4 cm : la diagonale (20 cm) est bien plus longue que ses deux côtés ✓

Réponse. a) $AB \approx 17,7$ cm — b) $BC \approx 9,4$ cm.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : quatre longueurs

On repère à chaque fois si l'inconnue est au numérateur (on multiplie) ou au dénominateur (on divise).

a) L'inconnue est l'adjacent, au numérateur :

$$\text{adj} = 9 \times \cos(45^\circ) \approx 9 \times 0,7071 \approx 6,36$$

soit environ 6,4 cm.

b) L'inconnue est l'hypoténuse, au dénominateur :

$$\text{hyp} = \frac{5}{\cos(60^\circ)} = \frac{5}{0,5} = 10$$

soit exactement 10 cm.

c) $\text{adj} = 14 \times \cos(72^\circ) \approx 14 \times 0,309 \approx 4,33$, soit environ 4,3 cm.

d) $\text{hyp} = \frac{8,4}{\cos(15^\circ)} \approx \frac{8,4}{0,9659} \approx 8,70$, soit environ 8,7 cm.

Contrôle commun. Dans les cas a) et c) le résultat est plus petit que l'hypoténuse donnée ; dans les cas b) et d) il est plus grand que l'adjacent donné ✓

Réponse. a) $\approx 6,4$ cm — b) 10 cm — c) $\approx 4,3$ cm — d) $\approx 8,7$ cm.