

Plaquette 4 – Calculer la mesure d'un angle

Cosinus d'un angle aigu — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

La définition :

$$\cos(\text{angle}) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

Retrouver l'angle à partir de son cosinus. La calculatrice possède une touche $\cos^{-1}$ (parfois notée *acos* ou *arccos*, souvent en seconde fonction de la touche $\cos$) :

$$\text{si } \cos(x) = 0,6 \text{ alors } x = \cos^{-1}(0,6) \approx 53^\circ$$

Méthode.

- repérer l'hypoténuse et l'adjacent à l'angle cherché ;
- écrire l'égalité du cosinus et calculer la fraction ;
- appliquer $\cos^{-1}$ à cette valeur ;
- arrondir et conclure par une phrase.

Ne pas arrondir en route. On enchaîne le quotient et $\cos^{-1}$ sur la calculatrice. Arrondir le cosinus à 0,5 au lieu de 0,52 change l'angle de plus de 1° .

Contrôles.

Si le cosinus vaut...	l'angle est...	
proche de 1	très petit (moins de 25°)	
0,71	environ 45°	
0,5	exactement 60°	
proche de 0	très grand (plus de 80°)	

Angles complémentaires. Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus ont pour somme 90° : dès qu'on en connaît un, l'autre s'obtient par soustraction, sans calculatrice.

Correction de l'exercice 1 - Premier calcul d'angle

L'angle droit est en A : l'hypoténuse est $[BC]$ (7 cm) et l'adjacent à l'angle de sommet B est $[AB]$ (3 cm). Les deux données sont donc exactement celles du cosinus.

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{7}$$

- $3 \div 7 \approx 0,4285$
- On remonte à l'angle : $\widehat{ABC} = \cos^{-1}\left(\frac{3}{7}\right)$
- À la calculatrice : $\widehat{ABC} \approx 64,62^\circ$

Arrondi au degré : $\widehat{ABC} \approx 65^\circ$.

Contrôle. Le cosinus est inférieur à 0,5, donc l'angle dépasse 60° ✓

Réponse. $\widehat{ABC} \approx 65^\circ$.

Correction de l'exercice 2 - Arrondir au dixième de degré

L'hypoténuse est $[EF]$ (9 cm) et l'adjacent à l'angle de sommet E est $[DE]$ (5 cm) :

$$\cos(\hat{DEF}) = \frac{DE}{EF} = \frac{5}{9}$$

$$- 5 \div 9 \approx 0,5555$$

$$- \hat{DEF} = \cos^{-1}\left(\frac{5}{9}\right) \approx 56,25^\circ$$

Arrondi au dixième : $\hat{DEF} \approx 56,3^\circ$.

Conseil de calculatrice. On tape directement $\cos^{-1}(5 \div 9)$: arrondir 0,5555 à 0,56 avant d'appliquer $\cos^{-1}$ donnerait $55,9^\circ$, soit $0,4^\circ$ d'écart.

Réponse. $\hat{DEF} \approx 56,3^\circ$.

Correction de l'exercice 3 - Un angle proche de zéro

L'hypoténuse est $[HI]$ (14 cm), l'adjacent à l'angle de sommet H est $[GH]$ (11 cm) :

$$\cos(\hat{GHI}) = \frac{GH}{HI} = \frac{11}{14}$$

$$- 11 \div 14 \approx 0,7857$$

$$- \hat{GHI} = \cos^{-1}\left(\frac{11}{14}\right) \approx 38,21^\circ$$

Arrondi au degré : $\hat{GHI} \approx 38^\circ$.

Contrôle. Le cosinus est supérieur à 0,71 (la valeur de 45°) : l'angle est donc inférieur à 45° ✓

Réponse. $\hat{GHI} \approx 38^\circ$.

Correction de l'exercice 4 - Les deux angles aigus

a) L'hypoténuse est $[KL]$ (50 cm) et l'adjacent à l'angle de sommet K est $[JK]$ (40 cm) :

$$\cos(\hat{JKL}) = \frac{JK}{KL} = \frac{40}{50} = 0,8$$

$$- \hat{JKL} = \cos^{-1}(0,8) \approx 36,87^\circ$$

Arrondi au degré : $\hat{JKL} \approx 37^\circ$.

b) Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont complémentaires :

$$- \hat{JLK} = 90^\circ - 36,87^\circ$$

$$- \hat{JLK} \approx 53,13^\circ, \text{ soit environ } 53^\circ.$$

Contrôle. $37 + 53 + 90 = 180$ ✓ La somme des angles du triangle est bien respectée.

Réponse. a) $\approx 37^\circ$ — b) $\approx 53^\circ$.

Correction de l'exercice 5 - Avec des décimaux

L'hypoténuse est $[NP]$ (3,5 cm) et l'adjacent à l'angle de sommet N est $[MN]$ (2,4 cm) :

$$\cos(\hat{MNP}) = \frac{MN}{NP} = \frac{2,4}{3,5}$$

$$- 2,4 \div 3,5 \approx 0,6857$$

$$- \hat{MNP} = \cos^{-1}\left(\frac{2,4}{3,5}\right) \approx 46,71^\circ$$

Arrondi au degré : $\hat{MNP} \approx 47^\circ$.

Contrôle. Le cosinus est un peu inférieur à 0,71 : l'angle est donc un peu supérieur à 45°
✓

Réponse. $\hat{MNP} \approx 47^\circ$.

Correction de l'exercice 6 - Calculer l'hypoténuse d'abord

a) Le cosinus a besoin de l'hypoténuse : on la calcule d'abord. Le triangle est rectangle en R , d'hypoténuse $[ST]$:

$$ST^2 = RS^2 + RT^2$$

$$— ST^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$

$$— ST = \sqrt{100} = 10, \text{ donc } ST = 10 \text{ cm.}$$

b) L'adjacent à l'angle de sommet S est $[RS]$:

$$\cos(\hat{RST}) = \frac{RS}{ST} = \frac{6}{10} = 0,6$$

$$— \hat{RST} = \cos^{-1}(0,6) \approx 53,13^\circ$$

Arrondi au degré : $\hat{RST} \approx 53^\circ$.

À retenir. Dans un triangle 3-4-5 (ou l'un de ses agrandissements), les angles aigus mesurent toujours environ 37° et 53° .

Réponse. a) $ST = 10$ cm — b) $\hat{RST} \approx 53^\circ$.

Correction de l'exercice 7 - Un angle remarquable

L'hypoténuse est $[VW]$ (12 cm) et l'adjacent à l'angle de sommet V est $[UV]$ (6 cm) :

$$\cos(\hat{UVW}) = \frac{UV}{VW} = \frac{6}{12} = 0,5$$

Or la valeur remarquable du cours est $\cos(60^\circ) = 0,5$. Donc :

$$— \hat{UVW} = 60^\circ$$

C'est une valeur **exacte**, pas un arrondi.

Comment la reconnaître. Dès que le côté adjacent est la moitié de l'hypoténuse, l'angle vaut exactement 60° : c'est le demi-triangle équilatéral.

Réponse. $\hat{UVW} = 60^\circ$ exactement.

Correction de l'exercice 8 - La pente d'une route

La route $[DA]$ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle en P ; sa projection horizontale $[DP]$ est le côté adjacent à l'angle de sommet D , celui que fait la route avec l'horizontale.

$$\cos(\hat{PDA}) = \frac{DP}{DA} = \frac{92}{100} = 0,92$$

$$— \hat{PDA} = \cos^{-1}(0,92) \approx 23,07^\circ$$

La route fait un angle d'environ $23,1^\circ$ avec l'horizontale.

Ordre de grandeur. C'est une pente très forte : les panneaux routiers annoncent rarement plus de 12%, ce qui correspond à environ 7° .

Réponse. Environ $23,1^\circ$.

Correction de l'exercice 9 - Le toit de la maison

Le triangle PBS est rectangle en P (verticale contre horizontale). Le chevron $[BS]$ est l'hypoténuse (4,5 m) et sa projection $[PB]$ est le côté adjacent à l'angle de sommet B (3,6 m).

$$\cos(\hat{P}BS) = \frac{PB}{BS} = \frac{3,6}{4,5} = 0,8$$

$$\text{— } \hat{P}BS = \cos^{-1}(0,8) \approx 36,87^\circ$$

Arrondi au degré : le toit fait un angle d'environ 37° avec l'horizontale.

Cohérence. Une pente de toit de 37° est courante en France : l'ordre de grandeur est crédible.

Réponse. Environ 37° .

Correction de l'exercice 10 - L'angle de la diagonale

a) Le triangle ABC est rectangle en B , d'hypoténuse $[AC]$:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\text{— } AC^2 = 18^2 + 12,5^2 = 324 + 156,25 = 480,25$$

$$\text{— } AC = \sqrt{480,25} \approx 21,91$$

La diagonale mesure environ 21,9 cm.

b) L'angle cherché est $\hat{B}AC$, de sommet A ; son côté adjacent est $[AB]$ et l'hypoténuse est $[AC]$:

$$\cos(\hat{B}AC) = \frac{AB}{AC} = \frac{18}{21,91} \approx 0,8215$$

$$\text{— } \hat{B}AC = \cos^{-1}(0,8215) \approx 34,77^\circ$$

La diagonale fait un angle d'environ 35° avec la longueur.

Précision. On utilise la valeur non arrondie de AC : c'est ce qui évite un écart d'un demi-degré.

Réponse. a) $\approx 21,9$ cm — b) $\approx 35^\circ$.

Correction de l'exercice 11 - Repérer l'erreur

L'élève a appliqué la fonction **cosinus** au nombre $4 \div 9$, alors qu'il fallait faire l'opération inverse : $4 \div 9$ **est déjà** le cosinus de l'angle, il faut donc utiliser $\cos^{-1}$ pour remonter à l'angle.

$$\cos(\hat{A}BC) = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{9} \approx 0,4444$$

$$\text{— } \hat{A}BC = \cos^{-1}\left(\frac{4}{9}\right) \approx 63,61^\circ$$

Arrondi au degré : $\hat{A}BC \approx 64^\circ$.

Comment repérer ce type d'erreur. Le résultat de l'élève, 1° , correspondrait à un triangle quasiment aplati, incompatible avec les longueurs données. Un angle aigu d'un triangle « normal » se situe le plus souvent entre 20° et 70° .

Réponse. Il faut $\cos^{-1}$ et non $\cos$: $\hat{A}BC \approx 64^\circ$.

Correction de l'exercice 12 - Lire la figure

Lecture de la figure. Le carré codé en A montre que le triangle ABC est rectangle en A : l'hypoténuse est $[BC]$, qui mesure 2,5 cm. L'angle marqué a pour sommet B, et son côté adjacent est $[AB]$, de 1,2 cm.

$$\cos(\hat{A}BC) = \frac{AB}{BC} = \frac{1,2}{2,5} = 0,48$$

$$- \hat{A}BC = \cos^{-1}(0,48) \approx 61,31^\circ$$

Arrondi au degré : $\hat{A}BC \approx 61^\circ$.

Contrôle. Le cosinus est juste en dessous de 0,5 : l'angle est donc juste au-dessus de 60°
✓

Réponse. Environ 61° .

Correction de l'exercice 13 - Le triangle isocèle

Le triangle ABC n'est pas rectangle : on travaille dans le triangle ABH , qui l'est en H .
Comme H est le milieu de $[BC]$:

$$- BH = \frac{12}{2} = 6, \text{ soit } BH = 6 \text{ cm.}$$

Dans le triangle ABH rectangle en H , l'hypoténuse est $[AB]$ (6,5 cm) et l'adjacent à l'angle de sommet B est $[BH]$ (6 cm) :

$$\cos(\hat{A}BH) = \frac{BH}{AB} = \frac{6}{6,5} \approx 0,9230$$

$$- \hat{A}BH = \cos^{-1}\left(\frac{6}{6,5}\right) \approx 22,62^\circ$$

Or $\hat{A}BC$ et $\hat{A}BH$ sont le même angle (H appartient à $[BC]$) : $\hat{A}BC \approx 23^\circ$.

Méthode. Dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal crée deux triangles rectangles : c'est le seul moyen d'y utiliser le cosinus.

Réponse. $\hat{A}BC \approx 23^\circ$.

Correction de l'exercice 14 - Un angle et son complémentaire

a) L'hypoténuse est $[EF]$ (10 cm), l'adjacent à l'angle de sommet E est $[DE]$ (7 cm) :

$$\cos(\hat{D}EF) = \frac{DE}{EF} = \frac{7}{10} = 0,7$$

$$- \hat{D}EF = \cos^{-1}(0,7) \approx 45,57^\circ, \text{ soit environ } 46^\circ.$$

b) **Par complémentarité** : les deux angles aigus d'un triangle rectangle ont pour somme 90° .

$$- \hat{D}FE = 90^\circ - 45,57^\circ \approx 44,43^\circ, \text{ soit environ } 44^\circ.$$

Directement : l'adjacent à l'angle de sommet F est $[DF]$:

$$\cos(\hat{D}FE) = \frac{DF}{EF} \approx \frac{7,14}{10} = 0,714$$

$$- \hat{D}FE = \cos^{-1}(0,714) \approx 44,43^\circ, \text{ soit environ } 44^\circ.$$

Les deux méthodes donnent le même résultat, ce qui valide le calcul.

Conseil. La complémentarité est plus rapide et plus sûre : elle n'utilise aucune longueur supplémentaire.

Réponse. a) $\approx 46^\circ$ — b) $\approx 44^\circ$ par les deux méthodes.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : quatre angles

On calcule à chaque fois le quotient $\frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$, puis on applique $\cos^{-1}$.

a) $\cos = \frac{9}{15} = 0,6$ et $\cos^{-1}(0,6) \approx 53,13^\circ$: environ 53° .

b) $\cos = \frac{2,5}{5} = 0,5$: c'est la valeur remarquable, l'angle vaut exactement 60° .

c) $\cos = \frac{24}{25} = 0,96$ et $\cos^{-1}(0,96) \approx 16,26^\circ$: environ 16° .

d) $\cos = \frac{7}{20} = 0,35$ et $\cos^{-1}(0,35) \approx 69,51^\circ$: environ 70° .

Lecture d'ensemble. Les cosinus vont de 0,96 à 0,35 et les angles de 16° à 70° : plus le cosinus est grand, plus l'angle est petit.

Réponse. a) $\approx 53^\circ$ — b) 60° — c) $\approx 16^\circ$ — d) $\approx 70^\circ$.