

Plaquette 5 – Problèmes : pentes, câbles et bilan du chapitre

Cosinus d'un angle aigu — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Cosinus. Pour un angle aigu d'un triangle rectangle :

$$\cos(\text{angle}) = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

Pythagore. Si ABC est rectangle en A :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Choisir son outil.

Ce que donne l'énoncé	Ce qu'on cherche	Outil
deux longueurs	la troisième longueur	Pythagore
deux longueurs (adjacent, hypoténuse)	un angle	$\cos^{-1}$
un angle et l'hypoténuse	le côté adjacent	$\text{adj} = \text{hyp} \times \cos$
un angle et l'adjacent	l'hypoténuse	$\text{hyp} = \frac{\text{adj}}{\cos}$

Où est l'angle droit ? Un mur et le sol, une verticale et une horizontale, deux côtés consécutifs d'un rectangle, une hauteur et sa base.

Angles complémentaires. Les deux angles aigus d'un triangle rectangle ont pour somme 90° : si l'angle donné n'est pas celui qui arrange, on prend son complémentaire.

Valeurs repères. $\cos(20^\circ) \approx 0,94$; $\cos(45^\circ) \approx 0,71$; $\cos(60^\circ) = 0,5$; $\cos(75^\circ) \approx 0,26$.

Contrôles. Un cosinus est entre 0 et 1 ; un côté adjacent est plus court que l'hypoténuse ; un angle aigu est entre 0° et 90° .

Correction de l'exercice 1 – Cosinus ou Pythagore ?

La règle : **un angle dans l'énoncé ou dans la question $\Rightarrow$ cosinus ; que des longueurs $\Rightarrow$ Pythagore.**

a) Que des longueurs : **théorème de Pythagore**, avec

$$\text{hyp}^2 = c_1^2 + c_2^2$$

b) Un angle est donné : **cosinus**, avec $\text{adj} = \text{hyp} \times \cos(\text{angle})$.

c) Que des longueurs : **théorème de Pythagore**, en soustrayant cette fois.

d) On cherche un angle à partir de l'adjacent et de l'hypoténuse : **cosinus**, suivi de $\cos^{-1}$.

Pourquoi cette question d'abord ? La moitié des erreurs du chapitre vient du choix de l'outil, pas du calcul.

Réponse. a) Pythagore — b) cosinus — c) Pythagore — d) cosinus.

Correction de l'exercice 2 - Le télési

Le triangle DPA est rectangle en P (la verticale $[PA]$ et l'horizontale $[DP]$). Le câble $[DA]$ est l'hypoténuse (840 m), et la distance horizontale $[DP]$ est le côté adjacent à l'angle de 18° , de sommet D .

$$\cos(\widehat{PDA}) = \frac{DP}{DA}$$

- $\cos(18^\circ) = \frac{DP}{840}$
- $DP = 840 \times \cos(18^\circ)$
- $DP \approx 840 \times 0,9511 \approx 798,9$

La distance horizontale est d'environ 799 m.

Contrôle. L'angle est faible, le cosinus proche de 1 : la distance horizontale est presque égale à la longueur du câble ✓

Réponse. Environ 799 m.

Correction de l'exercice 3 - La hauteur du télési

Le dénivelé est la longueur verticale $[PA]$. On connaît maintenant les deux autres côtés du triangle rectangle : c'est **Pythagore** qu'il faut utiliser, puisqu'on ne travaille plus qu'avec des longueurs.

Dans le triangle DPA rectangle en P , d'hypoténuse $[DA]$:

$$DA^2 = DP^2 + PA^2$$

- $840^2 = 798,9^2 + PA^2$
- $705\,600 \approx 638\,241 + PA^2$
- $PA^2 \approx 67\,359$
- $PA \approx \sqrt{67\,359} \approx 259,5$

Le dénivelé est d'environ 260 m.

Contrôle. Le dénivelé représente environ $\frac{260}{799} \approx 0,33$, soit une pente de 33% : c'est cohérent pour un télési.

Réponse. Environ 260 m de dénivelé.

Correction de l'exercice 4 - Le bateau et la bouée

L'amarre, la distance horizontale et la hauteur du quai forment un triangle rectangle : la verticale du quai et la surface de l'eau se coupent à angle droit.

- l'angle de 34° est celui entre l'amarre et l'horizontale ;
- son côté adjacent est la distance horizontale d , cherchée ;
- l'hypoténuse est l'amarre (9 m).

$$\cos(34^\circ) = \frac{d}{9}$$

- $d = 9 \times \cos(34^\circ)$
- $d \approx 9 \times 0,8290 \approx 7,461$

Le bateau est à environ 7,5 m du point d'accroche, à l'horizontale.

Contrôle. $7,5 < 9$ ✓ : la projection horizontale est plus courte que l'amarre.

Réponse. Environ 7,5 m.

Correction de l'exercice 5 - L'angle du hauban

a) Le mât est vertical, le sol horizontal : le triangle PSH est rectangle en P . L'énoncé ne donne que des longueurs, on utilise donc le théorème de Pythagore, avec l'hypoténuse $[SH]$:

$$SH^2 = PS^2 + PH^2$$

$$— SH^2 = 2,5^2 + 6^2 = 6,25 + 36 = 42,25$$

$$— SH = \sqrt{42,25} = 6,5$$

Le hauban mesure 6,5 m.

b) L'angle cherché est celui de sommet S , entre le hauban et le sol. Son côté adjacent est $[PS]$ (2,5 m) et l'hypoténuse est le hauban (6,5 m) :

$$\cos(P\hat{S}H) = \frac{PS}{SH} = \frac{2,5}{6,5} \approx 0,3846$$

$$— P\hat{S}H = \cos^{-1}(0,3846) \approx 67,38^\circ$$

Le hauban fait un angle d'environ 67° avec le sol.

Enchaînement typique. Pythagore pour la longueur manquante, puis cosinus pour l'angle : les deux outils du chapitre dans le même problème.

Réponse. a) 6,5 m — b) environ 67° .

Correction de l'exercice 6 - La rampe aux normes

La rampe est l'hypoténuse d'un triangle rectangle, et la distance horizontale est le côté adjacent à l'angle avec l'horizontale.

$$\cos(\text{angle}) = \frac{7,9}{8} = 0,9875$$

$$— \text{angle} = \cos^{-1}(0,9875) \approx 9,07^\circ$$

L'angle vaut environ $9,1^\circ$, ce qui est **supérieur** à 5° : la rampe **ne respecte pas** la norme.

Pour être conforme, il faudrait un cosinus d'au moins $\cos(5^\circ) \approx 0,9962$, donc une distance horizontale d'au moins $8 \times 0,9962 \approx 7,97$ m — c'est-à-dire une rampe presque à plat, ou plus longue.

Rédaction. Pour répondre à une question de conformité, on calcule la valeur réelle puis on la compare explicitement au seuil.

Réponse. Non : l'angle vaut environ $9,1^\circ$, supérieur à 5° .

Correction de l'exercice 7 - Le losange

a) O est le milieu de $[AC]$:

$$— OA = \frac{16}{2} = 8, \text{ soit } OA = 8 \text{ cm.}$$

Le triangle AOB est rectangle en O , d'hypoténuse $[AB]$ (10 cm, un côté du losange). D'après le théorème de Pythagore :

$$AB^2 = OA^2 + OB^2$$

$$— 10^2 = 8^2 + OB^2$$

$$— 100 = 64 + OB^2$$

$$— OB^2 = 36$$

$$— OB = \sqrt{36} = 6, \text{ soit } OB = 6 \text{ cm.}$$

b) Dans ce même triangle, l'adjacent à l'angle de sommet A est $[OA]$ et l'hypoténuse est $[AB]$:

$$\cos(\hat{BAO}) = \frac{OA}{AB} = \frac{8}{10} = 0,8$$

$$— \hat{BAO} = \cos^{-1}(0,8) \approx 36,87^\circ$$

L'angle $\hat{BAO}$ mesure environ 37° .

Remarque. L'angle complet du losange en A vaut le double, soit environ 74° : la diagonale $[AC]$ est bissectrice de cet angle.

Réponse. a) $OB = 6$ cm — b) $\hat{BAO} \approx 37^\circ$.

Correction de l'exercice 8 - Le trapèze rectangle

On abaisse la perpendiculaire à (AB) passant par C : elle coupe $[AB]$ en H . Le quadrilatère $AHCD$ a quatre angles droits, c'est un rectangle, donc :

$$— AH = DC = 6 \text{ cm, et } HC = AD = 6 \text{ cm.}$$

On en déduit la position de H sur $[AB]$:

$$— HB = AB - AH = 14 - 6 = 8, \text{ soit } HB = 8 \text{ cm.}$$

Le triangle BHC est rectangle en H : son hypoténuse est $[BC]$ (10 cm) et l'adjacent à l'angle de sommet B est $[HB]$ (8 cm).

$$\cos(\hat{HBC}) = \frac{HB}{BC} = \frac{8}{10} = 0,8$$

$$— \hat{HBC} = \cos^{-1}(0,8) \approx 36,87^\circ$$

Comme H appartient à $[AB]$, les angles $\hat{HBC}$ et $\hat{ABC}$ sont le même : $\hat{ABC} \approx 37^\circ$.

Méthode. Dans un trapèze rectangle, la hauteur issue du sommet « oblique » crée le triangle rectangle qui manquait.

Réponse. $\hat{ABC} \approx 37^\circ$.

Correction de l'exercice 9 - L'ombre du poteau

a) Le poteau (vertical) et l'ombre (horizontale) forment un triangle rectangle. La distance cherchée d en est l'hypoténuse. L'énoncé ne donne que des longueurs : c'est Pythagore.

$$d^2 = 4,2^2 + 3,1^2$$

$$— d^2 = 17,64 + 9,61$$

$$— d^2 = 27,25$$

$$— d = \sqrt{27,25} \approx 5,220$$

Soit environ 5,2 m.

b) Le rayon de soleil est justement ce segment d . L'angle qu'il fait avec le sol a pour sommet l'extrémité de l'ombre ; son côté adjacent est l'ombre (3,1 m) et l'hypoténuse est d :

$$\cos(\text{angle}) = \frac{3,1}{5,220} \approx 0,5938$$

$$— \text{angle} = \cos^{-1}(0,5938) \approx 53,58^\circ$$

Les rayons font un angle d'environ 54° avec le sol.

Contrôle. L'ombre est plus courte que le poteau : le soleil est haut, l'angle dépasse donc 45° ✓

Réponse. a) environ 5,2 m — b) environ 54° .

Correction de l'exercice 10 - Le cadre à redresser

a) Le triangle ABC est rectangle en B , d'hypoténuse $[AC]$:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$- AC^2 = 60^2 + 45^2 = 3600 + 2025 = 5625$$

$$- AC = \sqrt{5625} = 75$$

La diagonale mesure exactement 75 cm.

b) L'angle avec le grand côté est $\hat{BAC}$, dont l'adjacent est $[AB]$ (60 cm) :

$$\cos(\hat{BAC}) = \frac{AB}{AC} = \frac{60}{75} = 0,8$$

$$- \hat{BAC} = \cos^{-1}(0,8) \approx 36,87^\circ, \text{ soit environ } 37^\circ.$$

c) L'angle avec le petit côté est $\hat{BCA}$, dont l'adjacent est $[BC]$ (45 cm) :

$$\cos(\hat{BCA}) = \frac{BC}{AC} = \frac{45}{75} = 0,6$$

$$- \hat{BCA} = \cos^{-1}(0,6) \approx 53,13^\circ, \text{ soit environ } 53^\circ.$$

Contrôle. $37 + 53 = 90$: les deux angles sont bien complémentaires ✓ On aurait pu déduire le second du premier sans calcul.

Réponse. a) 75 cm — b) $\approx 37^\circ$ — c) $\approx 53^\circ$.

Correction de l'exercice 11 - Le pendule

a) On considère le triangle rectangle formé par le point d'accroche O , la boule B et le point P situé sur la verticale, à la hauteur de la boule. L'angle droit est en P .

L'angle de 25° est celui de sommet O , entre le fil et la verticale : son côté adjacent est justement la portion verticale $[OP]$, et l'hypoténuse est le fil $[OB]$ (80 cm).

$$\cos(25^\circ) = \frac{OP}{80}$$

$$- OP = 80 \times \cos(25^\circ)$$

$$- OP \approx 80 \times 0,9063 \approx 72,50$$

La boule est à environ 72,5 cm sous le point d'accroche.

b) Au repos, la boule est à 80 cm sous le point d'accroche. La remontée vaut donc :

$$- 80 - 72,5 = 7,5$$

La boule est remontée d'environ 7,5 cm.

Pourquoi le cosinus ici ? Parce que l'angle est mesuré **par rapport à la verticale** : c'est donc la verticale qui est le côté adjacent.

Réponse. a) environ 72,5 cm — b) environ 7,5 cm.

Correction de l'exercice 12 - Deux poteaux et un câble

On place H sur le second poteau, à la même hauteur que le sommet S du premier. Le segment $[SH]$ est alors horizontal et $[HT]$ vertical : le triangle SHT est **rectangle en H** , et le câble $[ST]$ en est l'hypoténuse.

$$- SH = 12 \text{ m (même distance que celle qui sépare les poteaux)} ;$$

$$- HT = 10 - 5 = 5 \text{ m (différence des hauteurs)}.$$

a) D'après le théorème de Pythagore :

$$ST^2 = SH^2 + HT^2$$

$$— ST^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$$

$$— ST = \sqrt{169} = 13$$

Le câble mesure exactement 13 m.

b) L'angle avec l'horizontale est $\widehat{HST}$; son côté adjacent est $[SH]$ (12 m) et l'hypoténuse est le câble (13 m) :

$$\cos(\widehat{HST}) = \frac{SH}{ST} = \frac{12}{13} \approx 0,9230$$

$$— \widehat{HST} = \cos^{-1}(0,9230) \approx 22,62^\circ$$

Le câble fait un angle d'environ 23° avec l'horizontale.

La clé de l'exercice. Le triangle rectangle n'existe pas sur la figure de départ : on le crée en traçant l'horizontale issue du sommet le plus bas.

Réponse. a) 13 m — b) environ 23° .

Correction de l'exercice 13 - Vérifier une affirmation

L'escalier incliné est l'hypoténuse du triangle rectangle formé avec l'emprise au sol (horizontale) et la hauteur (verticale). L'angle avec le sol a pour côté adjacent l'emprise au sol.

$$\cos(\text{angle}) = \frac{3,6}{4} = 0,9$$

$$— \text{angle} = \cos^{-1}(0,9) \approx 25,84^\circ$$

L'escalier fait en réalité un angle d'environ $25,8^\circ$ avec le sol : l'affirmation est **inexacte**, l'écart est de plus de 4° .

Contre-épreuve. Pour un angle de 30° , l'emprise au sol devrait être $4 \times \cos(30^\circ) \approx 3,46$ m, et non 3,6 m.

Rédaction. Pour réfuter une affirmation, on calcule la valeur réelle **et** on montre ce que donnerait la valeur annoncée : la double vérification est ce qu'attend un correcteur.

Réponse. Non : l'angle vaut environ $25,8^\circ$, pas 30° .

Correction de l'exercice 14 - Le triangle isocèle et son aire

a) H est le milieu de $[BC]$, donc $BH = \frac{10}{2} = 5$ cm. Le triangle ABH est rectangle en H , d'hypoténuse $[AB]$:

$$AB^2 = HA^2 + HB^2$$

$$— 13^2 = AH^2 + 5^2$$

$$— 169 = AH^2 + 25$$

$$— AH^2 = 144$$

$$— AH = \sqrt{144} = 12, \text{ soit } AH = 12 \text{ cm.}$$

b) L'aire d'un triangle vaut :

$$A = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{10 \times 12}{2} = 60$$

L'aire du triangle ABC est de 60 cm².

c) Dans le triangle ABH rectangle en H , l'adjacent à l'angle de sommet B est $[BH]$ et

l'hypoténuse est $[AB]$:

$$\cos(\hat{ABH}) = \frac{BH}{AB} = \frac{5}{13} \approx 0,3846$$

$$\text{— } \hat{ABH} = \cos^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) \approx 67,38^\circ$$

L'angle $\hat{ABC}$ mesure environ 67° .

Bilan. Trois questions, trois outils : Pythagore, la formule d'aire, le cosinus — tous dans le même triangle rectangle ABH .

Réponse. a) $AH = 12$ cm — b) 60 cm² — c) $\approx 67^\circ$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : choisir et calculer

a) Deux longueurs, on cherche la troisième : **Pythagore**.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 25 + 144 = 169$$

$$\text{— } BC = \sqrt{169} = 13, \text{ soit } BC = 13 \text{ cm.}$$

b) Un angle et l'hypoténuse, on cherche l'adjacent : **cosinus**, on multiplie.

$$AB = BC \times \cos(42^\circ) \approx 20 \times 0,7431 \approx 14,86$$

soit environ $14,9$ cm.

c) L'adjacent et l'hypoténuse, on cherche l'angle : **cosinus puis** $\cos^{-1}$.

$$\cos(\hat{ABC}) = \frac{9}{15} = 0,6$$

$$\text{— } \hat{ABC} = \cos^{-1}(0,6) \approx 53,13^\circ, \text{ soit environ } 53^\circ.$$

d) Un angle et l'adjacent, on cherche l'hypoténuse : **cosinus**, on divise.

$$BC = \frac{AB}{\cos(60^\circ)} = \frac{7}{0,5} = 14$$

soit exactement 14 cm.

Bilan du chapitre. Un angle dans l'énoncé $\Rightarrow$ cosinus ; que des longueurs $\Rightarrow$ Pythagore. L'inconnue au numérateur $\Rightarrow$ on multiplie ; au dénominateur $\Rightarrow$ on divise.

Réponse. a) 13 cm — b) $\approx 14,9$ cm — c) $\approx 53^\circ$ — d) 14 cm.