

Plaquette 1 - Tester une solution, comprendre une équation

Équations du premier degré — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Vocabulaire. Dans $5x - 3 = 2x + 9$:

- x est l'**inconnue** ;
- $5x - 3$ est le **membre de gauche**, $2x + 9$ le **membre de droite** ;
- une **solution** est une valeur de x qui rend l'égalité vraie.

Tester une valeur. On calcule les deux membres séparément, puis on compare.

$$\text{Pour } x = 4: \quad 5 \times 4 - 3 = 17 \quad 2 \times 4 + 9 = 17$$

Les deux résultats coïncident, donc 4 est solution.

Trois situations à distinguer.

Type d'égalité	Exemple	Solutions
équation ordinaire	$2x + 1 = 7$	une seule, $x = 3$
identité	$2(x + 3) = 2x + 6$	tous les nombres
égalité impossible	$x + 1 = x + 2$	aucune

Les deux propriétés qui permettront de résoudre. Une égalité reste vraie si on effectue la même opération des deux côtés :

$$a = b \Rightarrow a + c = b + c \quad a = b \Rightarrow a \times c = b \times c \quad (c \neq 0)$$

La vérification n'est jamais facultative : elle transforme une réponse en certitude.

Correction de l'exercice 1 - Reconnaître une solution

La méthode. On calcule le membre de gauche pour chaque valeur, puis on compare à 11.

Pour $x = 2$: $4 \times 2 - 5 = 8 - 5 = 3$. Or $3 \neq 11$: 2 n'est pas solution.

Pour $x = 4$: $4 \times 4 - 5 = 16 - 5 = 11$. Les deux membres coïncident :

$$4 \times 4 - 5 = 11$$

Donc 4 **est** solution.

Pour $x = 6$: $4 \times 6 - 5 = 24 - 5 = 19$. Or $19 \neq 11$: 6 n'est pas solution.

Ce que le tableau des valeurs montre. En passant de 2 à 4 puis à 6, le membre de gauche prend les valeurs 3, 11 et 19 : il augmente de 8 chaque fois que x augmente de 2, donc de 4 par unité — c'est le coefficient de x . Cette régularité garantit qu'il n'existe **qu'une** solution : le membre de gauche ne peut valoir 11 qu'une seule fois.

Réponse. $x = 4$ est l'unique solution.

Correction de l'exercice 2 - Tester dans les deux membres

La règle. On calcule **séparément** les deux membres : on n'a pas le droit de supposer l'égalité vraie pour la simplifier.

a) **Pour** $x = 2$. Gauche : $3 \times 2 + 7 = 13$. Droite : $5 \times 2 - 1 = 9$. Comme $13 \neq 9$, 2 n'est pas

solution.

b) **Pour** $x = 4$. Gauche : $12 + 7 = 19$. Droite : $20 - 1 = 19$. Les deux membres sont égaux :
$$3 \times 4 + 7 = 5 \times 4 - 1 = 19$$

Donc 4 **est** solution.

c) **Pour** $x = 0$. Gauche : 7. Droite : -1 . Comme $7 \neq -1$, 0 n'est pas solution.

Le piège à éviter. Beaucoup d'élèves calculent un seul membre et « voient » si ça tombe juste. Il faut écrire les deux calculs côte à côte : c'est la seule façon de justifier une réponse, et le correcteur attend les deux lignes.

Réponse. Seul $x = 4$ est solution.

Correction de l'exercice 3 - Avec des nombres négatifs

a) **Pour** $x = -4$. Gauche : $2 \times (-4) + 9 = -8 + 9 = 1$. Droite : $-(-4) - 3 = 4 - 3 = 1$.
$$2 \times (-4) + 9 = -(-4) - 3 = 1$$

Les deux membres valent 1 : -4 **est** solution.

b) **Pour** $x = 4$. Gauche : $8 + 9 = 17$. Droite : $-4 - 3 = -7$. Comme $17 \neq -7$, 4 n'est pas solution.

c) -4 est une solution de l'équation, 4 n'en est pas une. Rien n'interdit à une solution d'être négative : l'inconnue désigne un nombre quelconque, pas forcément positif.

Le point délicat du calcul. Le membre de droite s'écrit $-x - 3$; pour $x = -4$, cela donne $-(-4) - 3$, et l'opposé de -4 vaut 4. Écrire $-4 - 3 = -7$ serait l'erreur classique : on remplacerait $-x$ par x . Les parenthèses lors de la substitution suppriment ce risque.

Réponse. a) -4 est solution — b) 4 ne l'est pas.

Correction de l'exercice 4 - Une égalité toujours vraie

a) **Pour** $x = 1$: gauche $3 \times 3 = 9$, droite $3 + 6 = 9$ ✓

Pour $x = 5$: gauche $3 \times 7 = 21$, droite $15 + 6 = 21$ ✓

Pour $x = -3$: gauche $3 \times (-1) = -3$, droite $-9 + 6 = -3$ ✓

b) Les trois valeurs conviennent. On soupçonne que **tous** les nombres sont solutions.

c) **L'explication.** Les deux membres sont deux écritures d'une même expression, reliées par la distributivité :

$$3(x + 2) = 3x + 6$$

L'égalité est donc vraie pour toute valeur de x : ce n'est pas une équation à résoudre, mais une **identité**.

La distinction à retenir. Une équation comme $2x + 1 = 7$ sélectionne une valeur particulière ; une identité comme $3(x + 2) = 3x + 6$ exprime une règle de calcul valable partout. Le signe $=$ est le même, le statut est très différent.

Réponse. Tous les nombres sont solutions : c'est une identité, pas une équation.

Correction de l'exercice 5 - Une égalité impossible

a) **Pour** $x = 0$: gauche 5, droite 8 ✗

Pour $x = 3$: gauche 8, droite 11 ✗

Pour $x = 100$: gauche 105, droite 108 ✗

Dans les trois cas, l'écart vaut 3.

b) **Aucune solution.** On le démontre en calculant la différence des deux membres :

$$(x + 8) - (x + 5) = x + 8 - x - 5 = 3$$

Le membre de droite dépasse toujours celui de gauche de 3, **quelle que soit** la valeur de x . Les deux ne peuvent donc jamais coïncider.

Comment on aurait pu le voir immédiatement. Les deux membres contiennent le même terme x : quel que soit le nombre choisi, on ajoute 5 d'un côté et 8 de l'autre au même nombre. Une équation dont les termes en x s'éliminent n'a soit aucune solution, soit une infinité — jamais une seule.

Réponse. Aucune solution : l'écart entre les deux membres vaut toujours 3.

Correction de l'exercice 6 - Traduire une phrase en équation

a) Le double est $2x$, augmenté de 5 : l'équation est $2x + 5 = 17$.

b) Ici l'ordre est inversé : on ajoute 5 d'abord, puis on double **le tout**, ce qui impose une parenthèse :

$$2(x + 5) = 17$$

c) Le triple est $3x$, le nombre augmenté de 8 est $x + 8$: l'équation est $3x = x + 8$.

d) Le tiers d'un nombre s'écrit $\frac{x}{3}$: l'équation est $\frac{x}{3} = 12$.

La comparaison a) / b) est l'essentiel de l'exercice. Les deux phrases se ressemblent, les deux équations non : la première a pour solution $x = 6$, la seconde $x = 3,5$. Le mot **puis** signale qu'une opération porte sur tout ce qui précède, donc une parenthèse.

Le réflexe. Relire la phrase en suivant l'ordre des opérations écrites : si l'ordre ne colle pas, il manque une parenthèse.

Réponse. a) $2x + 5 = 17$ — b) $2(x + 5) = 17$ — c) $3x = x + 8$ — d) $\frac{x}{3} = 12$.

Correction de l'exercice 7 - Deviner puis vérifier

a) On cherche le nombre qui, augmenté de 7, donne 12 : c'est 5. **Vérification :** $5 + 7 = 12$ ✓

b) On cherche le nombre dont le quintuple vaut 45 : c'est 9. **Vérification :** $5 \times 9 = 45$ ✓

c) On cherche le nombre qui, diminué de 4, donne -1 : c'est 3. **Vérification :** $3 - 4 = -1$ ✓

d) On cherche le nombre dont le sixième vaut 3 : c'est 18. **Vérification :** $\frac{18}{6} = 3$ ✓

Ce que la résolution mentale utilise sans le dire. Dans chaque cas, on fait l'**opération inverse** : soustraire 7, diviser par 5, ajouter 4, multiplier par 6. C'est exactement la méthode que les plaquettes suivantes vont formaliser :

$$a = b \Rightarrow a + c = b + c \quad a = b \Rightarrow a \times c = b \times c$$

Pourquoi vérifier malgré tout. Une solution devinée juste reste une solution devinée : la vérification est ce qui la rend démontrée.

Réponse. a) $x = 5$ — b) $x = 9$ — c) $x = 3$ — d) $x = 18$.

Correction de l'exercice 8 - L'erreur de Lucas

a) **Le test correct**, membre par membre, pour $x = 3$:

Gauche : $2 \times 3 + 4 = 10$. Droite : $5 \times 3 - 5 = 10$.

$$2 \times 3 + 4 = 5 \times 3 - 5 = 10$$

Les deux membres valent 10, donc 3 **est** bien solution : la conclusion de Lucas est juste.

b) **Le problème est la rédaction.** Lucas écrit d'abord l'égalité $2x + 4 = 5x - 5$ comme si elle était acquise, puis en déduit $10 = 10$. Or c'est justement ce qu'il faut établir : il utilise comme point de départ ce qu'il cherche à prouver.

La rédaction attendue calcule les deux membres **séparément**, sans jamais écrire le signe = entre eux avant la conclusion :

- membre de gauche : $2 \times 3 + 4 = 10$;
- membre de droite : $5 \times 3 - 5 = 10$;
- les deux résultats sont égaux, donc 3 est solution.

Pourquoi c'est important. Avec la méthode de Lucas, on « démontrerait » aussi que 2 est solution : $8 = 5$, et il suffirait de ne pas regarder. Séparer les deux calculs est la seule façon de ne pas se tromper soi-même.

Réponse. a) 3 est solution (les deux membres valent 10) — b) il part de l'égalité à prouver.

Correction de l'exercice 9 - Combien de solutions ?

a) Les deux membres sont **identiques** : l'égalité est vraie pour tout nombre. Il y a une **infinité** de solutions.

b) Les termes en x sont les mêmes des deux côtés, mais les constantes diffèrent. La différence vaut

$$(4x + 7) - (4x + 1) = 6$$

L'écart est constant et non nul : il n'y a **aucune** solution.

c) Les coefficients de x diffèrent (4 contre 3). En retranchant $3x$ aux deux membres, on obtient $x + 1 = 7$, donc $x = 6$: il y a **une solution unique**.

Vérification de c) : gauche $24 + 1 = 25$, droite $18 + 7 = 25$ ✓

La règle générale à retenir. Tout se joue sur les coefficients de x : s'ils diffèrent, il y a exactement une solution ; s'ils sont égaux, l'équation n'a aucune solution ou une infinité, selon que les constantes diffèrent ou non.

Réponse. a) une infinité — b) aucune — c) une seule, $x = 6$.

Correction de l'exercice 10 - L'âge de Zoé

a) Aujourd'hui, la mère a $x + 28$ ans. Dans 6 ans :

- Zoé aura $x + 6$ ans ;
- sa mère aura $x + 28 + 6 = x + 34$ ans.

b) « La mère aura le double de l'âge de Zoé » se traduit par

$$x + 34 = 2(x + 6)$$

La parenthèse est indispensable : c'est l'âge **entier** de Zoé qui est doublé.

c) **Test de $x = 22$.** Gauche : $22 + 34 = 56$. Droite : $2 \times (22 + 6) = 2 \times 28 = 56$. Les deux membres coïncident, donc 22 est solution.

Contrôle dans le contexte. Zoé a 22 ans, sa mère 50 ans. Dans 6 ans, Zoé aura 28 ans et sa mère 56 ans, qui est bien le double ✓

Le double contrôle. Une solution d'un problème doit être vérifiée deux fois : dans l'équation, et dans l'énoncé. La seconde vérification repère les erreurs de traduction, que la première laisserait passer.

Réponse. a) $x + 6$ et $x + 34$ — b) $x + 34 = 2(x + 6)$ — c) oui, les deux membres valent 56.

Correction de l'exercice 11 - Le périmètre imposé

a) **La formule du périmètre**, puis la condition de l'énoncé :

$$P = 2(x + (x + 7)) = 2(2x + 7) = 4x + 14$$

L'équation est donc $4x + 14 = 46$.

b) **Test de $x = 8$.** Gauche : $4 \times 8 + 14 = 32 + 14 = 46$. Droite : 46. Les deux membres coïncident : 8 est solution.

c) La largeur vaut 8 cm et la longueur $8 + 7 = 15$ cm.

Contrôle géométrique : $2 \times (8 + 15) = 2 \times 23 = 46$ cm ✓

Le rôle de l'équation. On connaît le périmètre et on cherche une dimension : c'est le sens inverse de l'application d'une formule. Sans équation, il faudrait tester des largeurs au hasard jusqu'à tomber sur la bonne — ce qui marche ici, mais pas si la solution est une fraction.

Réponse. a) $4x + 14 = 46$ — b) oui — c) 8 cm sur 15 cm.

Correction de l'exercice 12 - Deux solutions possibles ?

a) **Pour $x = 3$:** $3^2 = 9$, et le membre de droite vaut 9 ✓ Donc 3 est solution.

b) **Pour $x = -3$:** $(-3)^2 = 9$ également, puisque le carré d'un nombre négatif est positif ✓ Donc -3 est aussi solution.

$$3^2 = (-3)^2 = 9$$

c) Une équation du **premier degré** ne contient l'inconnue qu'à la puissance 1 : elle s'écrit sous la forme $ax + b = 0$. Ici l'inconnue apparaît au carré : l'équation est du **second degré**, et c'est précisément ce qui lui permet d'avoir deux solutions.

Ce qu'il faut retenir. Une équation du premier degré a au plus une solution — c'est ce qui rend sa résolution systématique. Dès que l'inconnue apparaît au carré, cette garantie tombe : $x^2 = 9$ en a deux, $x^2 = 0$ une seule, $x^2 = -1$ aucune.

Réponse. a) et b) 3 et -3 sont solutions — c) l'inconnue est au carré, l'équation est du second degré.

Correction de l'exercice 13 - Le prix du menu

a) Les sept menus coûtent $7x$, auxquels s'ajoutent les 9 € du plat :

$$7x + 9 = 114$$

b) **Test de $x = 15$.** Gauche : $7 \times 15 + 9 = 105 + 9 = 114$. Droite : 114 ✓ Donc 15 est solution : le menu coûte 15 €.

c) Pour $x = 16$: l'addition vaudrait $7 \times 16 + 9 = 112 + 9 = 121$ €, soit 7 € de plus.

La lecture du coefficient. Chaque euro ajouté au prix du menu augmente l'addition de 7 € — le nombre de menus. C'est ce que dit le coefficient de x dans l'équation, et cela permet de répondre à la question c) sans refaire tout le calcul : $114 + 7 = 121$ €.

Le contrôle de vraisemblance. Un menu à 15 € pour une addition de 114 € à huit : l'ordre de grandeur est cohérent, ce qui conforte la traduction de l'énoncé.

Réponse. a) $7x + 9 = 114$ — b) oui — c) 121 €.

Correction de l'exercice 14 - Chercher la solution dans une liste

Le test, membre par membre.

Pour $x = 4$: gauche $\frac{4}{4} + 3 = 1 + 3 = 4$; droite $\frac{4}{2} - 1 = 2 - 1 = 1$. Comme $4 \neq 1$, ce n'est pas une solution.

Pour $x = 8$: gauche $\frac{8}{4} + 3 = 2 + 3 = 5$; droite $\frac{8}{2} - 1 = 4 - 1 = 3$. Comme $5 \neq 3$, ce n'est pas une solution.

Pour $x = 16$: gauche $\frac{16}{4} + 3 = 4 + 3 = 7$; droite $\frac{16}{2} - 1 = 8 - 1 = 7$.

$$\frac{16}{4} + 3 = \frac{16}{2} - 1 = 7$$

Les deux membres coïncident : 16 **est** solution.

La régularité derrière les trois essais. L'écart droite - gauche vaut -3 , -2 , puis 0 : il augmente de 1 chaque fois que x augmente de 4. Ce n'est pas un hasard —

$$\left(\frac{x}{2} - 1\right) - \left(\frac{x}{4} + 3\right) = \frac{x}{4} - 4$$

et cette expression s'annule pour $x = 16$, ce qui confirme l'unicité de la solution.

Réponse. $x = 16$ (les deux membres valent 7).

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : trois équations, trois statuts

(E_1) — **test de** $x = 2$. Gauche : $10 - 4 = 6$. Droite : 6 ✓ C'est une solution.

Les coefficients de x diffèrent (5 et 3), donc l'équation a **exactement une** solution : c'est $x = 2$.

(E_2) — **test de** $x = 2$. Gauche : $2 \times 5 = 10$. Droite : $4 + 6 = 10$ ✓

Mais ici les deux membres sont deux écritures de la même expression :

$$2(x + 3) = 2x + 6$$

C'est une **identité** : tous les nombres sont solutions.

(E_3) — **test de** $x = 2$. Gauche : 7. Droite : 5 ✗ Ce n'est pas une solution.

Les termes en x étant identiques, la différence des deux membres vaut $(3x + 1) - (3x - 1) = 2$, constante et non nulle : il n'y a **aucune** solution.

Le bilan de la plaquette. Un test réussi ne dit pas combien il y a de solutions : dans (E_1) il y en a une, dans (E_2) une infinité. C'est la comparaison des **coefficients de** x qui tranche, et c'est ce que la résolution systématique, objet de la plaquette suivante, va rendre automatique.

Réponse. (E_1) : une solution, $x = 2$ — (E_2) : une infinité — (E_3) : aucune.