

## Plaquette 3 – L'inconnue dans les deux membres

### Équations du premier degré — Quatrième

Corrections détaillées

#### Boîte à outils

**La méthode, en trois étapes.**

| Étape | Geste                                       |
|-------|---------------------------------------------|
| 1     | rassembler les termes en $x$ dans un membre |
| 2     | rassembler les nombres dans l'autre         |
| 3     | diviser par le coefficient de $x$           |

**Exemple complet.**

$$5x - 3 = 2x + 9 \Rightarrow 3x - 3 = 9 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$$

(on a retranché  $2x$ , puis ajouté 3, puis divisé par 3).

**Le bon côté.** On regroupe les  $x$  du côté où leur coefficient est **le plus grand** : le coefficient final est alors positif, et les calculs plus sûrs.

$$2x + 5 = 7x - 10 \Rightarrow 5 = 5x - 10 \Rightarrow 15 = 5x \Rightarrow x = 3$$

**Les trois issues possibles.**

| Après regroupement       | Conclusion                      |
|--------------------------|---------------------------------|
| $ax = b$ avec $a \neq 0$ | une solution, $x = \frac{b}{a}$ |
| $0 = b$ avec $b \neq 0$  | aucune solution                 |
| $0 = 0$                  | tous les nombres sont solutions |

**La vérification se fait toujours dans l'équation de départ**, jamais dans une ligne intermédiaire : une erreur de recopiage passerait inaperçue.

#### Correction de l'exercice 1 – Regrouper les termes en $x$

**La méthode.** On retranche aux deux membres le terme en  $x$  le plus petit, puis on isole.

a) On retranche  $4x$  :  $3x - 2 = 10$ , puis on ajoute 2 :  $3x = 12$ , puis on divise par 3 :

$$7x - 2 = 4x + 10 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$$

**Vérification** : gauche  $28 - 2 = 26$ , droite  $16 + 10 = 26$  ✓

b) On retranche  $6x$  :  $3x + 5 = 20$ , donc  $3x = 15$  et  $x = 5$ . **Vérification** : gauche  $45 + 5 = 50$ , droite  $30 + 20 = 50$  ✓

c) On retranche  $5x$  :  $3x - 3 = 12$ , donc  $3x = 15$  et  $x = 5$ . **Vérification** : gauche  $40 - 3 = 37$ , droite  $25 + 12 = 37$  ✓

**Le geste de base.** Retrancher  $4x$  aux deux membres est autorisé par la même propriété que retrancher un nombre :

$$a = b \Rightarrow a - c = b - c$$

Ici  $c$  vaut  $4x$ , ce qui ne change rien à la règle.

**Réponse.** a)  $x = 4$  — b)  $x = 5$  — c)  $x = 5$ .

## Correction de l'exercice 2 - Choisir le bon côté

**Première façon — les  $x$  à gauche.** On retranche  $8x$  aux deux membres :

$$3x + 14 - 8x = -6 \quad \text{soit} \quad -5x + 14 = -6$$

puis on retranche 14 :  $-5x = -20$ , et on divise par  $-5$  :  $x = 4$ .

**Seconde façon — les  $x$  à droite.** On retranche  $3x$  aux deux membres :

$$14 = 5x - 6$$

puis on ajoute 6 :  $20 = 5x$ , et on divise par 5 :  $x = 4$ .

**Vérification :** gauche  $12 + 14 = 26$ , droite  $32 - 6 = 26$  ✓

**La comparaison.** Les deux chemins donnent la même solution — l'égalité  $a = b$  se lit aussi bien  $b = a$ . Mais la seconde évite tout coefficient négatif : un seul signe moins de moins, c'est une erreur de moins.

**La règle pratique.** On regroupe les  $x$  du côté où leur coefficient est le plus grand — ici  $8x$  à droite. Le coefficient final est alors positif.

**Réponse.**  $x = 4$  par les deux chemins ; regrouper à droite évite les coefficients négatifs.

## Correction de l'exercice 3 - Avec des négatifs

a) On ajoute  $3x$  aux deux membres :  $5x - 7 = 8$ , donc  $5x = 15$  et  $x = 3$ .

**Vérification :** gauche  $6 - 7 = -1$ , droite  $-9 + 8 = -1$  ✓

b) On ajoute  $4x$  :  $1 = 5x - 14$ , puis on ajoute 14 :  $15 = 5x$ , donc  $x = 3$ .

**Vérification :** gauche  $-12 + 1 = -11$ , droite  $3 - 14 = -11$  ✓

c) On ajoute  $2x$  :  $5 = 5x - 20$ , puis on ajoute 20 :  $25 = 5x$ , donc  $x = 5$ .

**Vérification :** gauche  $5 - 10 = -5$ , droite  $15 - 20 = -5$  ✓

**Le geste commun aux trois.** Quand un membre contient  $-3x$ , on **ajoute**  $3x$  aux deux membres pour le faire disparaître. Ajouter l'opposé est toujours possible, et évite de manipuler des coefficients négatifs.

**Le contrôle systématique.** Dans les trois cas, les deux membres valent la même valeur négative : une vérification qui tombe sur deux nombres égaux, même laids, est le meilleur signe que la résolution est juste.

**Réponse.** a)  $x = 3$  — b)  $x = 3$  — c)  $x = 5$ .

## Correction de l'exercice 4 - Une équation sans solution

**La résolution.** On retranche  $6x$  aux deux membres :

$$6x + 5 - 6x = 6x - 2 - 6x \quad \text{soit} \quad 5 = -2$$

L'inconnue a entièrement disparu, et on aboutit à une égalité **fausse** : 5 ne vaut pas  $-2$ .

**Conclusion.** L'équation n'a **aucune solution**. Aucun nombre ne peut la vérifier.

**L'interprétation.** Les deux membres ont le même coefficient de  $x$  : quelle que soit la valeur choisie, on part du même nombre  $6x$  et on ajoute 5 d'un côté, on retranche 2 de l'autre. L'écart entre les deux membres vaut

$$(6x + 5) - (6x - 2) = 7$$

constamment, donc jamais nul.

**Ce qu'il faut écrire en rédaction.** Trouver «  $5 = -2$  » n'est pas une erreur de calcul : c'est le résultat, et il faut le conclure explicitement — « l'équation n'a pas de solution » —

plutôt que de chercher à rattraper le calcul.

**Réponse.** Aucune solution : on aboutit à  $5 = -2$ , égalité fausse.

### Correction de l'exercice 5 - Une infinité de solutions

**La résolution.** On développe le membre de gauche :

$$4(x + 3) = 4x + 12$$

Les deux membres sont alors identiques. En retranchant  $4x$  puis  $12$  aux deux membres, on obtient  $0 = 0$ , égalité **toujours vraie**.

**Conclusion.** Tous les nombres sont solutions : l'égalité est une identité, pas une équation à une solution.

**Le test de contrôle.** Pour  $x = 0$  :  $4 \times 3 = 12$  ✓ Pour  $x = 7$  :  $4 \times 10 = 40$  et  $28 + 12 = 40$  ✓ Pour  $x = -5$  :  $4 \times (-2) = -8$  et  $-20 + 12 = -8$  ✓

**La comparaison avec l'exercice précédent.** Dans les deux cas l'inconnue disparaît, mais l'issue diffère :

- si l'égalité restante est fausse ( $5 = -2$ ), il n'y a aucune solution ;
- si elle est vraie ( $0 = 0$ ), tous les nombres conviennent.

C'est la dernière ligne qui décide, et il faut la lire attentivement avant de conclure.

**Réponse.** Tous les nombres sont solutions : on aboutit à  $0 = 0$ .

### Correction de l'exercice 6 - L'erreur de Rayan

a) **Test de  $x = 12$ .** Gauche :  $60 + 3 = 63$ . Droite :  $24 + 18 = 42$ . Comme  $63 \neq 42$ , la réponse est fausse.

b) Les deux premières lignes sont correctes : retrancher  $2x$  donne bien  $3x + 3 = 18$ , puis retrancher  $3$  donne  $3x = 15$ . **L'erreur est à la dernière ligne** : Rayan a **retranché**  $3$  au lieu de **diviser** par  $3$ .

La propriété à appliquer est celle de la division :

$$a = b \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \quad (c \neq 0)$$

c) **La résolution correcte.**

$$5x + 3 = 2x + 18 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$$

**Vérification** : gauche  $25 + 3 = 28$ , droite  $10 + 18 = 28$  ✓

**La leçon.** Le coefficient  $3$  de  $3x$  **multiplie** l'inconnue : on le supprime en divisant, pas en soustrayant. C'est la confusion la plus tenace du chapitre, et la vérification finale l'aurait détectée immédiatement.

**Réponse.** a)  $63 \neq 42$  — b) il a soustrait  $3$  au lieu de diviser — c)  $x = 5$ .

### Correction de l'exercice 7 - Solutions non entières

a) On retranche  $2x$  :  $3x + 1 = 7$ , donc  $3x = 6$  et  $x = 2$ . **Vérification** : gauche  $11$ , droite  $11$  ✓

b) On retranche  $3x$  :  $4x - 4 = 1$ , donc  $4x = 5$  et

$$x = \frac{5}{4}$$

**Vérification** : gauche  $7 \times \frac{5}{4} - 4 = \frac{35}{4} - \frac{16}{4} = \frac{19}{4}$  ; droite  $3 \times \frac{5}{4} + 1 = \frac{15}{4} + \frac{4}{4} = \frac{19}{4}$  ✓

c) On retranche  $x$  :  $5x + 5 = -3$ , donc  $5x = -8$  et

$$x = -\frac{8}{5}$$

**Vérification :** gauche  $6 \times \left(-\frac{8}{5}\right) + 5 = -\frac{48}{5} + \frac{25}{5} = -\frac{23}{5}$  ; droite  $-\frac{8}{5} - \frac{15}{5} = -\frac{23}{5}$  ✓

**Ce que les vérifications montrent.** Une solution fractionnaire n'a rien d'anormal : la vérification demande simplement de calculer avec des fractions, en les mettant au même dénominateur. C'est plus long, mais c'est la seule preuve que la réponse est juste.

**Réponse.** a)  $x = 2$  — b)  $x = \frac{5}{4}$  — c)  $x = -\frac{8}{5}$ .

### Correction de l'exercice 8 - Deux forfaits téléphoniques

a) **Forfait A :**  $C_A = 12 + 0,30n$ . **Forfait B :**  $C_B = 20 + 0,10n$ .

b) On résout l'équation  $C_A = C_B$  :

$$12 + 0,30n = 20 + 0,10n$$

On retranche  $0,10n$  :  $12 + 0,20n = 20$ , puis on retranche 12 :  $0,20n = 8$ , et on divise :

$$n = \frac{8}{0,20} = 40$$

**Vérification :**  $C_A = 12 + 12 = 24$  € et  $C_B = 20 + 4 = 24$  € ✓ Les deux forfaits coûtent 24 € pour 40 SMS.

c) Pour  $n = 60$  :  $C_A = 12 + 18 = 30$  € et  $C_B = 20 + 6 = 26$  €. **Le forfait B est plus avantageux.**

**La lecture générale.** Au-delà de 40 SMS, l'écart  $C_A - C_B = 0,20n - 8$  devient positif : B gagne. En dessous, A est meilleur. Le point d'équilibre, trouvé par l'équation, sépare les deux régimes — c'est exactement ce qu'on demande à une équation de donner.

**Réponse.** a)  $12 + 0,30n$  et  $20 + 0,10n$  — b) 40 SMS, pour 24 € — c) le forfait B.

### Correction de l'exercice 9 - Les deux réservoirs

a) **Premier réservoir :**  $V_1 = 300 + 8t$ . **Second réservoir :**  $V_2 = 500 - 12t$ .

b) On résout  $V_1 = V_2$  :

$$300 + 8t = 500 - 12t$$

On ajoute  $12t$  aux deux membres :  $300 + 20t = 500$ , puis on retranche 300 :  $20t = 200$ , donc

$$t = 10$$

Les deux réservoirs contiennent la même quantité au bout de 10 minutes.

c)  $V_1 = 300 + 80 = 380$  L, et  $V_2 = 500 - 120 = 380$  L ✓ Le volume commun est 380 L.

**Pourquoi l'égalité se produit nécessairement.** L'un monte de 8 L/min, l'autre descend de 12 L/min : l'écart initial de 200 L se comble à raison de 20 L par minute, donc en 10 minutes. L'équation formalise ce raisonnement, et donne au passage le volume commun.

**Le domaine de validité.** Au-delà de  $t = \frac{500}{12} \approx 41,7$  min, le second réservoir serait vide : la formule cesse alors de décrire la réalité.

**Réponse.** a)  $300 + 8t$  et  $500 - 12t$  — b) au bout de 10 min — c) 380 L.

### Correction de l'exercice 10 - Une histoire d'âges

a) Dans  $t$  années, le père aura  $42 + t$  ans et le fils  $12 + t$  ans.

b) On traduit « le double » :

$$42 + t = 2(12 + t)$$

On développe :  $42 + t = 24 + 2t$ . On retranche  $t$  :  $42 = 24 + t$ , puis on retranche 24 :  $t = 18$ .

**Vérification** : dans 18 ans, le père aura 60 ans et le fils 30 ans ✓

c) On cherche  $t$  tel que  $42 + t = 3(12 + t)$ , soit  $42 + t = 36 + 3t$ . On retranche  $t$  :  $42 = 36 + 2t$ , donc  $2t = 6$  et  $t = 3$ .

Une valeur **positive** : ce sera dans 3 ans, et non dans le passé. Vérification : le père aura 45 ans et le fils 15 ans, et  $45 = 3 \times 15$  ✓

**Ce que le signe de  $t$  raconte.** Une solution négative aurait signifié « il y a  $|t|$  années ». Ici les deux réponses sont positives : les deux événements sont à venir, et celui du triple précède celui du double — logique, puisque l'écart d'âge pèse de moins en moins avec le temps.

**Réponse.** a)  $42 + t$  et  $12 + t$  — b) dans 18 ans — c) non, ce sera dans 3 ans.

### Correction de l'exercice 11 - Deux périmètres égaux

a) **Carré** :  $P_1 = 4(x + 3) = 4x + 12$ .

**Rectangle** :  $P_2 = 2(x + (2x - 1)) = 2(3x - 1) = 6x - 2$ .

b) On résout  $P_1 = P_2$  :

$$4x + 12 = 6x - 2$$

On retranche  $4x$  :  $12 = 2x - 2$ , puis on ajoute 2 :  $14 = 2x$ , donc  $x = 7$ .

c) **Carré** : côté  $7 + 3 = 10$  cm, périmètre 40 cm.

**Rectangle** : dimensions 7 cm et  $2 \times 7 - 1 = 13$  cm, périmètre  $2 \times 20 = 40$  cm ✓

**Les deux contrôles.** Le périmètre commun vaut bien 40 cm, et les dimensions obtenues sont toutes positives — condition indispensable pour que les figures existent. Pour  $x = 0,4$  par exemple, le rectangle aurait une dimension négative et le problème n'aurait pas de sens.

**Remarque.** Les aires, elles, ne sont pas égales :  $100 \text{ cm}^2$  pour le carré,  $91 \text{ cm}^2$  pour le rectangle. Même périmètre ne signifie pas même aire.

**Réponse.** a)  $4x + 12$  et  $6x - 2$  — b)  $x = 7$  — c) carré de 10 cm, rectangle  $7 \times 13$ , périmètre 40 cm.

### Correction de l'exercice 12 - Reconnaître le cas

**Le critère.** Tout se joue sur les coefficients de  $x$ , une fois les parenthèses développées.

a) Les deux membres ont le même coefficient 3, mais des constantes différentes (8 et  $-1$ ). En retranchant  $3x$ , on obtiendrait  $8 = -1$  : **aucune solution**.

b) Les coefficients diffèrent (5 et 2) : il y a **exactement une** solution. On la trouve en retranchant  $2x$  :  $3x - 2 = 7$ , donc  $3x = 9$  et  $x = 3$ .

**Vérification** : gauche 13, droite 13 ✓

c) On développe le membre de gauche :

$$2(3x + 1) = 6x + 2$$

Les deux membres sont identiques : **une infinité** de solutions.

**La méthode générale.** On ramène l'équation à la forme  $ax = b$  :

- $a \neq 0$  : une solution ;
- $a = 0$  et  $b \neq 0$  : aucune ;
- $a = 0$  et  $b = 0$  : une infinité.

Développer avant de conclure est indispensable, comme le montre le cas c) : sans développement, rien ne laissait deviner l'identité.

**Réponse.** a) aucune — b) une seule,  $x = 3$  — c) une infinité.

### Correction de l'exercice 13 - Des termes des deux côtés

**Le premier geste : réduire chaque membre séparément**, avant tout regroupement.

a) Gauche :  $4x - x + 3 = 3x + 3$ . L'équation devient  $3x + 3 = 2x + 11$ . On retranche  $2x$  :  $x + 3 = 11$ , donc  $x = 8$ .

**Vérification** : gauche  $32 + 3 - 8 = 27$ , droite  $16 + 11 = 27$  ✓

b) Gauche :  $-2x + 12$ . L'équation devient  $-2x + 12 = 3x - 8$ . On ajoute  $2x$  :  $12 = 5x - 8$ , puis  $20 = 5x$ , donc  $x = 4$ .

**Vérification** : gauche  $7 - 8 + 5 = 4$ , droite  $12 - 8 = 4$  ✓

c) Gauche :  $4x - 4$ . Droite :  $x + 8$ . L'équation devient  $4x - 4 = x + 8$ . On retranche  $x$  :  $3x - 4 = 8$ , donc  $3x = 12$  et  $x = 4$ .

**Vérification** : gauche  $24 - 4 - 8 = 12$ , droite  $9 + 4 - 1 = 12$  ✓

**La règle d'ordre.** On réduit d'abord, on regroupe ensuite. Attaquer le regroupement sur une expression non réduite multiplie les termes à déplacer, donc les occasions de se tromper de signe.

**Réponse.** a)  $x = 8$  — b)  $x = 4$  — c)  $x = 4$ .

### Correction de l'exercice 14 - Les deux piles de livres

a) Au départ :  $x$  et  $3x$  livres. Après modification :  $x + 12$  et  $3x - 8$ . L'égalité s'écrit

$$x + 12 = 3x - 8$$

On retranche  $x$  :  $12 = 2x - 8$ , puis on ajoute  $8$  :  $20 = 2x$ , donc  $x = 10$ .

b) La première pile contenait 10 livres, la seconde 30.

c) À la fin :  $10 + 12 = 22$  livres dans la première,  $30 - 8 = 22$  dans la seconde ✓

**Le double contrôle.** L'équation est vérifiée, et le résultat a du sens : les nombres de livres sont entiers et positifs à chaque étape. Une solution comme  $x = 10,5$  aurait signalé une erreur de traduction, puisqu'on ne compte pas des demi-livres.

**Le choix de l'inconnue.** Appeler  $x$  la **petite** pile permet d'écrire la grande comme  $3x$ , sans fraction. L'inverse aurait donné  $\frac{x}{3}$  et compliqué inutilement le calcul.

**Réponse.** a)  $x + 12 = 3x - 8$ ,  $x = 10$  — b) 10 et 30 livres — c) 22 livres chacune.

### Correction de l'exercice 15 - Synthèse : cinq équations

a) On retranche  $3x$  :  $5x - 5 = 20$ , donc  $5x = 25$  et  $x = 5$ . **Vérification** : gauche 35, droite 35 ✓

b) Les deux membres sont identiques : **tous les nombres** sont solutions. En retranchant  $2x$  puis 9, on obtient  $0 = 0$ .

c) On retranche  $x$  :  $-7 = 3x + 2$ , puis on retranche 2 :  $-9 = 3x$ , donc

$$x = -3$$

**Vérification :** gauche  $-3 - 7 = -10$ , droite  $-12 + 2 = -10$  ✓

d) On retranche  $5x : 1 = 6$ , égalité fausse : **aucune solution**.

e) On ajoute  $3x : 10 = 5x - 15$ , puis on ajoute  $15 : 25 = 5x$ , donc  $x = 5$ . **Vérification :** gauche  $10 - 15 = -5$ , droite  $10 - 15 = -5$  ✓

**Le bilan de la plaquette.** Cinq équations, trois issues différentes. Une équation du premier degré n'a pas forcément une solution : c'est la comparaison des coefficients de  $x$  qui décide, et elle se lit sur la dernière ligne du calcul.

**Réponse.** a)  $x = 5$  — b) une infinité — c)  $x = -3$  — d) aucune — e)  $x = 5$ .