

Plaquette 1 - Fractions égales et simplification

Nombres rationnels — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Un nombre rationnel est un quotient $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers relatifs et $b \neq 0$.

Règle fondamentale. Multiplier ou diviser le numérateur et le dénominateur par un même nombre non nul ne change pas le quotient :

$$\frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a}{b} \quad \frac{a \div k}{b \div k} = \frac{a}{b}$$

Fraction irréductible. Une fraction est irréductible lorsque le seul diviseur commun positif de son numérateur et de son dénominateur est 1. On l'obtient en divisant les deux par leur PGCD.

Égalité de deux fractions (produits en croix).

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ équivaut à } a \times d = b \times c$$

Place du signe. Pour $b \neq 0$:

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} \quad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

Critères de divisibilité utiles pour simplifier.

Diviseur	On regarde
2	le chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8
3	la somme des chiffres est un multiple de 3
5	le chiffre des unités est 0 ou 5
9	la somme des chiffres est un multiple de 9
10	le chiffre des unités est 0

Attention. On simplifie un **produit**, jamais une somme : dans $\frac{3+5}{3}$, on ne peut pas barrer les 3.

Correction de l'exercice 1 - Rendre irréductible

La règle du cours. Diviser le numérateur et le dénominateur par un même nombre non nul ne change pas le quotient :

$$\frac{a \div k}{b \div k} = \frac{a}{b}$$

a) 12 et 18 sont divisibles par 6 : $\frac{12}{18} = \frac{2 \times 6}{3 \times 6} = \frac{2}{3}$.

b) $45 = 15 \times 3$ et $60 = 15 \times 4$, donc $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$.

c) $\frac{-24}{36} = \frac{-2 \times 12}{3 \times 12} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$.

d) $84 = 42 \times 2$ et $210 = 42 \times 5$, donc $\frac{84}{210} = \frac{2}{5}$.

Comment savoir qu'on a terminé. Il faut qu'aucun nombre autre que 1 ne divise à la

fois le haut et le bas : 2 et 3, 3 et 4, 2 et 5 n'ont plus de diviseur commun.

Réponse. a) $\frac{2}{3}$ — b) $\frac{3}{4}$ — c) $-\frac{2}{3}$ — d) $\frac{2}{5}$.

Correction de l'exercice 2 - Simplifier en une seule étape

a) Les deux nombres se terminent par un chiffre pair, donc **tous deux sont divisibles par 2** : la fraction n'est pas irréductible. (La somme des chiffres de 252 vaut 9 et celle de 420 vaut 6 : ils sont aussi divisibles par 3.)

b) On applique plusieurs fois la règle :

$$\frac{a \div k}{b \div k} = \frac{a}{b}$$

— division par 2 : $\frac{252}{420} = \frac{126}{210}$;

— division par 2 : $\frac{126}{210} = \frac{63}{105}$;

— division par 3 : $\frac{63}{105} = \frac{21}{35}$;

— division par 7 : $\frac{21}{35} = \frac{3}{5}$.

c) On a divisé successivement par 2, 2, 3 puis 7, soit au total par $2 \times 2 \times 3 \times 7 = 84$. Le PGCD de 252 et 420 est donc 84, et $\frac{252 \div 84}{420 \div 84} = \frac{3}{5}$ directement.

Ce qu'il faut retenir. Simplifier par étapes donne toujours le bon résultat ; connaître le PGCD fait juste gagner du temps.

Réponse. $\frac{252}{420} = \frac{3}{5}$; le PGCD est 84.

Correction de l'exercice 3 - Compléter une égalité

Le geste. On cherche par quel nombre on est passé d'un dénominateur à l'autre, puis on applique le même au numérateur :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$$

a) De 7 à 42, on multiplie par 6 (car $42 \div 7 = 6$), donc le numérateur est $3 \times 6 = 18$.

b) De 5 à 35, on multiplie par 7, donc le dénominateur est $8 \times 7 = 56$.

c) De 9 à -45, on multiplie par -5, donc le numérateur est $-2 \times (-5) = 10$. On vérifie : $\frac{10}{-45} = -\frac{10}{45} = -\frac{2}{9}$ après simplification par 5.

d) Ici le dénominateur **diminue** : $72 \div 4 = 18$, on divise donc par 18. Le numérateur est $54 \div 18 = 3$.

Vérification par les produits en croix. Pour d) : $54 \times 4 = 216$ et $72 \times 3 = 216$ ✓

Réponse. a) 18 — b) 56 — c) 10 — d) 3.

Correction de l'exercice 4 - Trier des fractions égales

La méthode. Le plus sûr est de rendre chaque fraction irréductible, puis de comparer les formes obtenues.

$$\frac{a \div k}{b \div k} = \frac{a}{b}$$

— $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ (division par 2) ;

- $\frac{-9}{12} = \frac{-3}{4}$ (division par 3) ;
- $\frac{3}{5}$ est déjà irréductible ;
- $\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$ (division par 5) ;
- $\frac{-6}{8} = \frac{-3}{4}$ (division par 2) ;
- $\frac{21}{28} = \frac{3}{4}$ (division par 7) ;
- $\frac{-3}{4}$ est déjà irréductible ;
- $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$ (division par 6).

Les groupes. $\left\langle \frac{6}{10}; \frac{3}{5}; \frac{15}{25} \right\rangle$ valent $\frac{3}{5}$; $\left\langle \frac{-9}{12}; \frac{-6}{8}; \frac{-3}{4} \right\rangle$ valent $-\frac{3}{4}$; $\left\langle \frac{21}{28}; \frac{18}{24} \right\rangle$ valent $\frac{3}{4}$.

Le piège. $\frac{3}{4}$ et $-\frac{3}{4}$ se ressemblent mais ne sont pas le même nombre : le signe fait partie du nombre.

Réponse. Trois nombres : $\frac{3}{5}$, $-\frac{3}{4}$ et $\frac{3}{4}$.

Correction de l'exercice 5 - Produits en croix

Le critère du cours.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ équivaut à } a \times d = b \times c$$

Son intérêt : il évite de simplifier, donc il fonctionne même quand les nombres sont laids.

a) $7 \times 36 = 252$ et $12 \times 21 = 252$. Les produits sont égaux, donc $\frac{7}{12} = \frac{21}{36}$.

b) $9 \times 21 = 189$ et $15 \times 12 = 180$. Les produits diffèrent, donc les fractions **ne sont pas égales**. En effet $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ et $\frac{12}{21} = \frac{4}{7}$.

c) $-5 \times (-18) = 90$ et $6 \times 15 = 90$. Les produits sont égaux, donc $\frac{-5}{6} = \frac{15}{-18}$: les deux valent $-\frac{5}{6}$.

Le réflexe de contrôle. Quand les produits en croix sont très proches sans être égaux, comme en b), c'est le signe que les fractions sont proches mais distinctes : on ne peut pas trancher à l'œil.

Réponse. a) égales — b) non égales — c) égales.

Correction de l'exercice 6 - Déplacer le signe

Les règles de signe d'un quotient.

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} \quad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

a) $\frac{-15}{25} = -\frac{15}{25} = -\frac{3}{5}$ (division par 5).

b) $\frac{14}{-21} = -\frac{14}{21} = -\frac{2}{3}$ (division par 7).

c) Deux signes moins se compensent : $\frac{-30}{-48} = \frac{30}{48} = \frac{5}{8}$ (division par 6). Le résultat est **positif**, il ne s'écrit pas sous la forme demandée.

d) Attention au signe devant la fraction : $-\frac{-9}{15} = +\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$, lui aussi positif.

La règle des signes en une phrase. Deux signes identiques donnent un quotient positif, deux signes contraires un quotient négatif — exactement comme pour un produit.

Réponse. a) $-\frac{3}{5}$ — b) $-\frac{2}{3}$ — c) $\frac{5}{8}$ (positif) — d) $\frac{3}{5}$ (positif).

Correction de l'exercice 7 - Mettre au même dénominateur

Ce qu'on cherche. Un multiple commun aux deux dénominateurs — le plus petit rend les calculs plus légers.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$$

a) Multiples de 6 : 6, 12, 18, ... ; multiples de 9 : 9, 18, ... Le plus petit commun est 18.

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \times 3}{6 \times 3} = \frac{15}{18} \quad \frac{7}{9} = \frac{7 \times 2}{9 \times 2} = \frac{14}{18}$$

b) Le plus petit multiple commun à 4 et 6 est 12 : $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ et $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$.

c) Le plus petit multiple commun à 15 et 10 est 30 : $\frac{2}{15} = \frac{4}{30}$ et $\frac{7}{10} = \frac{21}{30}$.

Le réflexe qui dépanne. Si on ne trouve pas le plus petit, le produit des deux dénominateurs marche toujours (ici $6 \times 9 = 54$) : le calcul est juste, il reste seulement à simplifier à la fin.

Réponse. a) $\frac{15}{18}$ et $\frac{14}{18}$ — b) $\frac{9}{12}$ et $\frac{10}{12}$ — c) $\frac{4}{30}$ et $\frac{21}{30}$.

Correction de l'exercice 8 - L'erreur de Léa

a) La barre de fraction est aussi une parenthèse : on calcule d'abord le numérateur.

$$\frac{4+6}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2,5$$

Léa trouvait 6, soit plus du double du vrai résultat.

b) La règle de simplification porte sur un **produit** :

$$\frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a}{b}$$

Elle dit qu'on peut diviser le numérateur **entier** et le dénominateur par k . Ici le numérateur est $4 + 6$, et 4 n'est pas un facteur de cette somme : diviser seulement le 4 revient à diviser une partie du numérateur, ce qui change le nombre.

c) Barrer est correct dès que le numérateur est un produit : $\frac{4 \times 6}{4} = 6$, ou encore

$$\frac{4+6}{2} = \frac{2 \times (2+3)}{2} = 5 \text{ après avoir factorisé le numérateur.}$$

À retenir. On ne simplifie jamais par-dessus un + ou un - sans avoir d'abord factorisé.

Réponse. a) $\frac{5}{2} = 2,5$ — b) on ne simplifie qu'un produit, pas un terme d'une somme.

Correction de l'exercice 9 - Du décimal à la fraction

Le point de départ. Un décimal s'écrit comme une fraction de dénominateur 10, 100 ou 1000 selon le nombre de chiffres après la virgule ; on simplifie ensuite.

$$\frac{a \div k}{b \div k} = \frac{a}{b}$$

a) $0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ (division par 25).

b) $0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ (division par 2).

c) $1,75 = \frac{175}{100} = \frac{7}{4}$ (division par 25). On peut aussi écrire $1 + \frac{3}{4}$.

d) $-0,125 = -\frac{125}{1000} = -\frac{1}{8}$ (division par 125).

Le lien à voir. Ces quatre fractions ont des dénominateurs 4, 5, 4, 8 : uniquement des produits de 2 et de 5. C'est exactement la condition pour qu'un rationnel ait une écriture décimale qui s'arrête — ce que $\frac{1}{3}$ n'a pas.

Réponse. a) $\frac{1}{4}$ — b) $\frac{3}{5}$ — c) $\frac{7}{4}$ — d) $-\frac{1}{8}$.

Correction de l'exercice 10 - Toutes les écritures possibles

a) On multiplie en haut et en bas par le même entier :

$$\frac{4}{7} = \frac{4 \times k}{7 \times k}$$

Pour $k = 2, 3$ et 5 : $\frac{8}{14}$, $\frac{12}{21}$ et $\frac{20}{35}$.

b) Le dénominateur est $7k$, il doit vérifier $7k < 50$, donc $k \leq 7$ (car $7 \times 7 = 49 < 50$ et $7 \times 8 = 56 > 50$). Cela fait 7 fractions, de $\frac{4}{7}$ elle-même à $\frac{28}{49}$.

c) Il faudrait $7k = 30$, or 30 n'est pas un multiple de 7 ($30 \div 7$ ne tombe pas juste). Il n'existe donc pas de telle fraction. On peut aussi raisonner par les produits en croix : $\frac{4}{7} = \frac{n}{30}$ donnerait $4 \times 30 = 7n$, soit $7n = 120$, impossible avec n entier.

Ce que cela montre. Les écritures d'un rationnel s'obtiennent toutes à partir de sa forme irréductible, en multipliant par un entier : les dénominateurs possibles sont exactement les multiples de 7.

Réponse. a) $\frac{8}{14}$, $\frac{12}{21}$, $\frac{20}{35}$ — b) 7 fractions — c) non, 30 n'est pas multiple de 7.

Correction de l'exercice 11 - La proportion d'une classe

a) La proportion est le quotient du nombre de demi-pensionnaires par l'effectif :

$$\frac{12}{28} = \frac{3 \times 4}{7 \times 4} = \frac{3}{7}$$

b) Pour la seconde classe : $\frac{15}{35} = \frac{3 \times 5}{7 \times 5} = \frac{3}{7}$. Les deux proportions sont donc **égales**, alors que ni les effectifs ni les nombres de demi-pensionnaires ne le sont.

On peut aussi le vérifier par les produits en croix : $12 \times 35 = 420$ et $28 \times 15 = 420$ ✓

c) On cherche n tel que $\frac{n}{21} = \frac{3}{7}$. Comme $21 = 7 \times 3$, on multiplie le numérateur par 3 : $n = 3 \times 3 = 9$.

Pourquoi simplifier est utile ici. Les fractions brutes $\frac{12}{28}$ et $\frac{15}{35}$ ne se ressemblent pas ; sous forme irréductible, l'égalité saute aux yeux. C'est le rôle de la forme irréductible : c'est la carte d'identité du nombre.

Réponse. a) $\frac{3}{7}$ — b) oui, même proportion — c) 9 élèves.

Correction de l'exercice 12 - Simplifier une très grande fraction

La règle appliquée à chaque étape.

$$\frac{a \div k}{b \div k} = \frac{a}{b}$$

Étape 1 – critère de 10. Les deux nombres se terminent par 0, on divise par 10 :

$$\frac{1350}{1800} = \frac{135}{180}$$

Étape 2 – critère de 5. Les deux se terminent par 5 ou 0, on divise par 5 : $\frac{135}{180} = \frac{27}{36}$.

Étape 3 – critère de 9. La somme des chiffres de 27 vaut 9, celle de 36 vaut 9 : les deux sont divisibles par 9.

$$\frac{27}{36} = \frac{3}{4}$$

Contrôle. 3 et 4 n'ont plus de diviseur commun autre que 1 : la fraction est irréductible. Les divisions successives ont été faites par 10, 5 et 9, soit par 450 en tout — c'est le PGCD de 1350 et 1800. Vérification par les produits en croix : $1350 \times 4 = 5400$ et $1800 \times 3 = 5400$ ✓

Réponse. $\frac{1350}{1800} = \frac{3}{4}$ (PGCD = 450).

Correction de l'exercice 13 - Le carrelage

a) La part bleue est $\frac{36}{96}$. On simplifie par 12 :

$$\frac{36}{96} = \frac{3 \times 12}{8 \times 12} = \frac{3}{8}$$

b) Il y a $96 - 36 = 60$ carreaux blancs, soit $\frac{60}{96}$. On simplifie encore par 12 : $\frac{60}{96} = \frac{5}{8}$.

c) Les deux fractions ont le même dénominateur, on ajoute les numérateurs :

$$\frac{3}{8} + \frac{5}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

C'était prévisible : tout carreau est bleu ou blanc, donc les deux parts réunies forment le mur entier, c'est-à-dire la totalité, soit 1.

Le contrôle à faire systématiquement. Dans un partage en deux catégories, les deux fractions doivent totaliser 1. Si ce n'est pas le cas, une des deux est fautive — c'est un contrôle gratuit et efficace.

Réponse. a) $\frac{3}{8}$ — b) $\frac{5}{8}$ — c) $\frac{3}{8} + \frac{5}{8} = 1$.

Correction de l'exercice 14 - Du pourcentage à la fraction

Le point de départ. Un pourcentage est une fraction de dénominateur 100 :

$$p\% = \frac{p}{100}$$

a) $40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$ (division par 20).

b) $75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$ (division par 25).

c) $12,5\% = \frac{12,5}{100}$. Pour n'avoir que des entiers, on multiplie en haut et en bas par 2 : $\frac{25}{200} = \frac{1}{8}$ (division par 25).

d) $\frac{1}{3} = \frac{100 \div 3}{100}$, or $100 \div 3 = 33,333...$ ne tombe pas juste. Le pourcentage exact n'existe

pas : on écrit $\frac{1}{3} \approx 33,3\%$, une valeur approchée. Le magasin annonce d'ailleurs souvent « -33% », ce qui est légèrement moins avantageux que le tiers.

Ce que ce cas montre. La fraction est parfois la seule écriture exacte : $\frac{1}{3}$ ne s'écrit ni en décimal fini, ni en pourcentage entier.

Réponse. a) $\frac{2}{5}$ — b) $\frac{3}{4}$ — c) $\frac{1}{8}$ — d) non, $\frac{1}{3} \approx 33,3\%$ seulement.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : la recette

a) Le mélange pèse $150 + 250 = 400$ g, dont 150 g de sucre :

$$\frac{150}{400} = \frac{3 \times 50}{8 \times 50} = \frac{3}{8}$$

b) Passer de 6 à 9 personnes revient à multiplier par $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$, soit 1,5 :

— sucre : $150 \times 1,5 = 225$ g ;

— farine : $250 \times 1,5 = 375$ g.

La proportion ne change pas : $\frac{225}{225 + 375} = \frac{225}{600} = \frac{3}{8}$, la même qu'en a). C'est justement le sens de la règle du cours — multiplier le haut et le bas par le même nombre ne change pas le quotient.

c) Chez le pâtissier, le mélange pèse $210 + 350 = 560$ g et $\frac{210}{560} = \frac{3}{8}$ (division par 70). La proportion est **la bonne** : il a simplement multiplié la recette par 1,4.

Le contrôle par les produits en croix. $150 \times 350 = 52\,500$ et $250 \times 210 = 52\,500$: les rapports sucre/farine coïncident ✓

Réponse. a) $\frac{3}{8}$ — b) 225 g et 375 g, proportion inchangée — c) oui, c'est la même proportion.