

Plaquette 2 - Comparer et ranger des rationnels

Nombres rationnels — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Même dénominateur. Le plus grand est celui qui a le plus grand numérateur :

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{c} \text{ équivaut à } a < b \quad (c > 0)$$

Même numérateur positif. Le plus grand est celui qui a le **plus petit** dénominateur : partager un gâteau en 5 donne des parts plus grosses qu'en 8.

$$\frac{3}{5} > \frac{3}{8}$$

Cas général. On réduit au même dénominateur, puis on compare les numérateurs.

Comparaison à 1 (pour a et b positifs) :

Situation	Conclusion
$a < b$	$\frac{a}{b} < 1$
$a = b$	$\frac{a}{b} = 1$
$a > b$	$\frac{a}{b} > 1$

Produits en croix (pour $b > 0$ et $d > 0$) :

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ équivaut à } a \times d < b \times c$$

Nombres négatifs. Un négatif est toujours inférieur à un positif, et entre deux négatifs, le plus grand est celui dont la distance à zéro est la plus petite :

$$-\frac{7}{4} < -\frac{3}{4} < 0 < \frac{1}{4}$$

Sur une droite graduée, les nombres sont rangés du plus petit à gauche au plus grand à droite : c'est le contrôle visuel le plus sûr.

Correction de l'exercice 1 - Même dénominateur

La règle du cours. À dénominateur positif commun, on compare les numérateurs :

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{c} \text{ équivaut à } a < b$$

a) $5 < 7$ donc $\frac{5}{9} < \frac{7}{9}$.

b) $11 < 13$ donc $\frac{11}{6} < \frac{13}{6}$. (Les deux sont d'ailleurs supérieurs à 1, puisque le numérateur dépasse le dénominateur.)

c) Ici les nombres sont négatifs : $-5 < -3$, donc $-\frac{5}{8} < -\frac{3}{8}$. Autrement dit, $-\frac{5}{8}$ est plus à gauche sur la droite graduée.

d) $-12 < -9$, donc $-\frac{12}{7} < -\frac{9}{7}$, c'est-à-dire $-\frac{9}{7} > -\frac{12}{7}$.

Le piège des cas c) et d). L'ordre des numérateurs sans le signe ($3 < 5$, $9 < 12$) est

l'inverse de l'ordre des nombres. Il faut comparer -5 et -3 , pas 5 et 3 .

Réponse. a) $\frac{5}{9} < \frac{7}{9}$ — b) $\frac{11}{6} < \frac{13}{6}$ — c) $-\frac{5}{8} < -\frac{3}{8}$ — d) $-\frac{12}{7} < -\frac{9}{7}$.

Correction de l'exercice 2 - Même numérateur

a) Les trois fractions ont le **même numérateur 2** : elles comptent toutes deux parts, mais des parts de tailles différentes. Plus on partage en un grand nombre de morceaux, plus les morceaux sont petits :

$$\frac{2}{7} < \frac{2}{5} < \frac{2}{3}$$

Bilal a la plus petite part, Chloé la plus grosse.

b) **Règle.** À numérateur positif égal, la fraction est d'autant plus grande que le dénominateur est petit. On peut le vérifier en décimal : $\frac{2}{7} \approx 0,29$, $\frac{2}{5} = 0,4$, $\frac{2}{3} \approx 0,67$.

c) Avec le signe moins, l'ordre **s'inverse** : le nombre le plus grand en valeur devient le plus petit.

$$-\frac{2}{3} < -\frac{2}{5} < -\frac{2}{7}$$

Image à garder. Un négatif, c'est une dette : devoir $\frac{2}{3}$ d'une tablette est pire que d'en devoir $\frac{2}{7}$.

Réponse. a) $\frac{2}{7} < \frac{2}{5} < \frac{2}{3}$ — c) l'ordre s'inverse : $-\frac{2}{3} < -\frac{2}{5} < -\frac{2}{7}$.

Correction de l'exercice 3 - Réduire pour comparer

La méthode générale. On écrit les deux fractions avec le même dénominateur, puis on compare les numérateurs :

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{c} \text{ équivaut à } a < b$$

a) Dénominateur commun 12 : $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ et $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$. Comme $9 < 10$, on a $\frac{3}{4} < \frac{5}{6}$.

b) Dénominateur commun 30 : $\frac{7}{10} = \frac{21}{30}$ et $\frac{2}{3} = \frac{20}{30}$. Comme $21 > 20$, on a $\frac{7}{10} > \frac{2}{3}$.

c) Dénominateur commun 14 : $\frac{5}{7} = \frac{10}{14}$. Comme $9 < 10$, on a $\frac{9}{14} < \frac{5}{7}$.

Le cas c) était plus rapide que les autres. 14 est un multiple de 7 : il suffisait de transformer une seule des deux fractions. Avant de multiplier les deux dénominateurs entre eux, regarder si l'un est déjà multiple de l'autre fait gagner beaucoup de temps.

Réponse. a) $\frac{3}{4} < \frac{5}{6}$ — b) $\frac{7}{10} > \frac{2}{3}$ — c) $\frac{9}{14} < \frac{5}{7}$.

Correction de l'exercice 4 - Plus grand ou plus petit que 1 ?

Le critère du cours (pour a et b positifs) : on compare le numérateur au dénominateur.

$$\frac{a}{b} < 1 \text{ si } a < b \quad \frac{a}{b} > 1 \text{ si } a > b$$

— $\frac{17}{18}$: $17 < 18$, donc inférieur à 1 ;

— $\frac{23}{23} = 1$;

— $\frac{41}{39}$: $41 > 39$, donc supérieur à 1 ;

- $\frac{99}{100}$: inférieur à 1 ;
- $\frac{100}{99}$: supérieur à 1 ;
- $-\frac{5}{3}$ est négatif, donc inférieur à 1 (et même à 0).

Le plus petit est $-\frac{5}{3}$, seul nombre négatif de la liste.

Le plus grand. Il faut départager $\frac{41}{39}$ et $\frac{100}{99}$, tous deux un peu au-dessus de 1. Produits en croix : $41 \times 99 = 4059$ et $39 \times 100 = 3900$. Comme $4059 > 3900$, on a $\frac{41}{39} > \frac{100}{99}$.

À retenir. Comparer à 1 est un premier tri gratuit : il sépare la liste en deux camps avant tout calcul.

Réponse. Plus petit : $-\frac{5}{3}$; plus grand : $\frac{41}{39}$.

Correction de l'exercice 5 - Ranger une liste

Choisir le bon dénominateur commun. Les dénominateurs sont 6, 4, 12, 3 et 8. Le plus petit multiple commun est 24 : $24 = 6 \times 4 = 4 \times 6 = 12 \times 2 = 3 \times 8 = 8 \times 3$.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$$

- $\frac{5}{6} = \frac{20}{24}$;
- $\frac{3}{4} = \frac{18}{24}$;
- $\frac{11}{12} = \frac{22}{24}$;
- $\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$;
- $\frac{7}{8} = \frac{21}{24}$.

Les numérateurs se rangent : $16 < 18 < 20 < 21 < 22$, d'où l'ordre croissant :

$$\frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6} < \frac{7}{8} < \frac{11}{12}$$

Contrôle de bon sens. Toutes ces fractions sont inférieures à 1, et la liste finale les range par « manque » décroissant : il manque $\frac{1}{3}$ à la première pour faire 1, et seulement $\frac{1}{12}$ à la dernière. Le classement est donc cohérent.

Réponse. $\frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6} < \frac{7}{8} < \frac{11}{12}$.

Correction de l'exercice 6 - Sur la droite graduée

a) Une unité est partagée en 6, donc une graduation vaut $\frac{1}{6}$.

b) On écrit chaque nombre avec le dénominateur 6 :

$$-\frac{4}{3} = \frac{-4 \times 2}{3 \times 2} = -\frac{8}{6} \quad \frac{3}{2} = \frac{3 \times 3}{2 \times 3} = \frac{9}{6}$$

$-\frac{4}{3}$ est donc à la 8^e graduation à **gauche** de 0, et $\frac{3}{2}$ à la 9^e graduation à **droite** de 0.

c) De $-\frac{8}{6}$ à $\frac{9}{6}$, on franchit $8 + 9 = 17$ graduations. Cela correspond à un écart de $\frac{17}{6}$, soit environ 2,83.

Pourquoi le même dénominateur. Sur une droite graduée, toutes les positions se lisent dans la même unité de découpage : réduire au même dénominateur, c'est exactement choisir cette unité commune. C'est le meilleur moyen de se convaincre qu'un nombre négatif « plus gros » est plus à gauche, donc plus petit.

Réponse. a) $\frac{1}{6}$ — b) $-\frac{8}{6}$ et $\frac{9}{6}$ — c) 17 graduations, soit $\frac{17}{6}$.

Correction de l'exercice 7 - Comparer par l'écriture décimale

a) On effectue les divisions :

$$\frac{4}{7} \approx 0,57 \quad \frac{7}{12} \approx 0,58 \quad \frac{5}{9} \approx 0,56$$

b) Les valeurs approchées suffisent ici à trancher, car elles sont distinctes au centième :

$$\frac{5}{9} < \frac{4}{7} < \frac{7}{12}$$

c) **Non.** $\frac{1234}{2469} \approx 0,4998$ et $\frac{1}{2} = 0,5$: arrondis au centième, les deux valent 0,50 et on ne peut pas conclure. Il faut revenir à l'exact, par les produits en croix :

$$1234 \times 2 = 2468 \quad 2469 \times 1 = 2469$$

Comme $2468 < 2469$, on a bien $\frac{1234}{2469} < \frac{1}{2}$.

La leçon. L'arrondi est un outil de comparaison rapide, pas une preuve : dès que deux nombres sont très proches, seule l'écriture fractionnaire exacte permet de conclure.

Réponse. b) $\frac{5}{9} < \frac{4}{7} < \frac{7}{12}$ — c) non : $\frac{1234}{2469} < \frac{1}{2}$, indécidable à l'arrondi.

Correction de l'exercice 8 - Encadrer entre deux entiers

La méthode. On effectue la division euclidienne du numérateur par le dénominateur : le quotient donne l'entier juste en dessous.

a) $47 = 9 \times 5 + 2$, donc $\frac{47}{9} = 5 + \frac{2}{9}$:

$$5 < \frac{47}{9} < 6$$

b) $100 = 7 \times 14 + 2$, donc $\frac{100}{7} = 14 + \frac{2}{7}$, d'où $14 < \frac{100}{7} < 15$.

c) Attention au signe. $23 = 5 \times 4 + 3$ donc $\frac{23}{5}$ est entre 4 et 5. En passant à l'opposé, l'encadrement **se retourne** :

$$-5 < -\frac{23}{5} < -4$$

Le contrôle. $-\frac{23}{5} = -4,6$, qui est bien entre -5 et -4 . L'erreur classique consiste à écrire $-4 < -\frac{23}{5} < -5$: une inégalité doit toujours se lire du plus petit au plus grand.

Réponse. a) $5 < \frac{47}{9} < 6$ — b) $14 < \frac{100}{7} < 15$ — c) $-5 < -\frac{23}{5} < -4$.

Correction de l'exercice 9 - Intercaler un nombre

a) Entre $\frac{3}{7}$ et $\frac{4}{7}$ il n'y a « pas de place » avec le dénominateur 7 : on change d'unité de découpage en multipliant en haut et en bas par 2.

$$\frac{3}{7} = \frac{6}{14} \quad \frac{4}{7} = \frac{8}{14}$$

La fraction $\frac{7}{14} = \frac{1}{2}$ convient.

b) Même geste avec un facteur plus grand. Dénominateur commun 6 : $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ et $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$; on multiplie encore par 4 : $\frac{8}{24}$ et $\frac{12}{24}$. Entre les deux : $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$ et $\frac{10}{24} = \frac{5}{12}$.

c) **Une infinité.** Le procédé se répète autant de fois qu'on veut : il suffit de multiplier le dénominateur commun par un nombre assez grand pour libérer de la place entre les deux numérateurs.

Ce que cela dit des rationnels. Contrairement aux entiers, deux rationnels distincts ne sont jamais « voisins » : il y en a toujours d'autres entre eux.

Réponse. a) $\frac{1}{2}$ — b) par exemple $\frac{3}{8}$ et $\frac{5}{12}$ — c) une infinité.

Correction de l'exercice 10 - Températures négatives

a) On réduit au même dénominateur. Les dénominateurs 2, 3, 5 et 4 ont pour plus petit multiple commun 60 :

$$-\frac{7}{2} = -\frac{210}{60} \quad -\frac{10}{3} = -\frac{200}{60} \quad -\frac{17}{5} = -\frac{204}{60} \quad -\frac{13}{4} = -\frac{195}{60}$$

On compare les numérateurs négatifs : $-210 < -204 < -200 < -195$. D'où, de la plus froide à la moins froide :

$$-\frac{7}{2} < -\frac{17}{5} < -\frac{10}{3} < -\frac{13}{4}$$

b) L'écart entre la plus froide ($-\frac{210}{60}$) et la moins froide ($-\frac{195}{60}$) vaut

$$\frac{210 - 195}{60} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}, \text{ soit } 0,25 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Le contrôle en décimal. $-3,5 < -3,4 < -3,33 < -3,25$: l'ordre trouvé est confirmé, et les quatre relevés tiennent dans un quart de degré.

Réponse. a) $-\frac{7}{2} < -\frac{17}{5} < -\frac{10}{3} < -\frac{13}{4}$ — b) $\frac{1}{4}$ °C.

Correction de l'exercice 11 - Comparer sans réduire

Le critère du cours (dénominateurs positifs) :

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ équivaut à } a \times d < b \times c$$

a) $13 \times 25 = 325$ et $17 \times 19 = 323$. Comme $325 > 323$, on a $\frac{13}{17} > \frac{19}{25}$.

b) $37 \times 59 = 2183$ et $53 \times 41 = 2173$. Comme $2183 > 2173$, on a $\frac{37}{53} > \frac{41}{59}$.

c) Les produits atteindraient l'ordre du million ($998 \times 1001 \approx 10^6$) : exacts mais longs à poser, et un seul chiffre faux fait basculer la conclusion. Dans ce cas, réduire au même dénominateur n'est pas mieux ; il vaut mieux comparer chaque fraction à un repère simple comme 1 ou $\frac{1}{2}$.

L'avantage des produits en croix. Ils ne demandent aucune recherche de multiple commun : c'est la méthode la plus mécanique, donc la plus sûre en contrôle, tant que les nombres restent raisonnables.

Réponse. a) $\frac{13}{17} > \frac{19}{25}$ — b) $\frac{37}{53} > \frac{41}{59}$.

Correction de l'exercice 12 - Qui a le mieux réussi ?

a) Les scores sont $\frac{17}{20}$, $\frac{21}{25}$ et $\frac{34}{40}$. Dénominateur commun 200 :

$$\frac{17}{20} = \frac{170}{200} \quad \frac{21}{25} = \frac{168}{200} \quad \frac{34}{40} = \frac{170}{200}$$

Donc $\frac{21}{25} < \frac{17}{20} = \frac{34}{40}$: Tom est derrière, Nina et Yanis sont **à égalité**.

b) Oui : $\frac{34}{40} = \frac{17 \times 2}{20 \times 2} = \frac{17}{20}$ d'après la règle du cours. Yanis a simplement fait le test en double.

c) On multiplie chaque fraction par 100 : $\frac{17}{20} = 85\%$, $\frac{21}{25} = 84\%$, $\frac{34}{40} = 85\%$.

Ce que le problème illustre. Comparer des résultats obtenus sur des totaux différents impose de ramener à une base commune — dénominateur commun ou pourcentage. Comparer 17 à 21 et à 34 n'aurait aucun sens.

Réponse. Nina = Yanis = 85%, devant Tom (84%).

Correction de l'exercice 13 - L'affirmation de Malik

a) Avec des numérateurs égaux, il a raison :

$$\frac{3}{4} > \frac{3}{10}$$

En effet $\frac{3}{4} = 0,75$ et $\frac{3}{10} = 0,3$.

b) **Contre-exemple.** $\frac{1}{4}$ et $\frac{9}{10}$: le dénominateur 10 est plus grand que 4, et pourtant $\frac{9}{10} = 0,9$ est plus grand que $\frac{1}{4} = 0,25$. Le numérateur a changé en même temps, l'affirmation ne dit donc rien.

c) **Formulation correcte.** À numérateur positif égal, la fraction est d'autant plus petite que le dénominateur est grand :

$$\frac{a}{b} > \frac{a}{c} \quad \text{lorsque } a > 0 \text{ et } 0 < b < c$$

Pourquoi la précision compte. Une règle mathématique n'est valable que sous ses hypothèses. Ici, oublier « à numérateur égal » transforme une règle vraie en affirmation fausse — et un seul contre-exemple suffit à le prouver.

Réponse. Affirmation fausse en général ; vraie seulement à numérateur positif égal.

Correction de l'exercice 14 - Deux remises

a) On compare $\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{8}$ en réduisant au dénominateur 40 :

$$\frac{2}{5} = \frac{16}{40} \quad \frac{3}{8} = \frac{15}{40}$$

Comme $16 > 15$, la remise de $\frac{2}{5}$ est la plus forte : c'est le premier magasin.

b) Remise du premier : $60 \times \frac{2}{5} = \frac{120}{5} = 24$ €, donc prix final $60 - 24 = 36$ €.

Remise du second : $60 \times \frac{3}{8} = \frac{180}{8} = 22,50$ €, donc prix final $60 - 22,50 = 37,50$ €.

c) Ce qu'on paie est le complément à 1 :

$$1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \quad 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

On vérifie : $60 \times \frac{3}{5} = 36$ € et $60 \times \frac{5}{8} = 37,50$ € ✓

Le contrôle utile. La plus grosse remise doit donner la plus petite part payée : $\frac{3}{5} = \frac{24}{40}$ est bien inférieur à $\frac{5}{8} = \frac{25}{40}$.

Réponse. a) $\frac{2}{5}$ — b) 36 € et 37,50 € — c) on paie $\frac{3}{5}$ et $\frac{5}{8}$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : le grand classement

Étape 1 — séparer par le signe. C'est le tri le plus rapide. Négatifs : $-\frac{2}{3}$, $-\frac{5}{4}$, -1 . Nul : 0. Positifs : $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{9}{7}$, $\frac{3}{4}$.

Étape 2 — trier les positifs par rapport à 1.

$$\frac{a}{b} > 1 \text{ si } a > b$$

Au-dessus de 1 : $\frac{5}{4}$ et $\frac{9}{7}$. En dessous : $\frac{7}{9}$ et $\frac{3}{4}$.

Entre $\frac{5}{4}$ et $\frac{9}{7}$, produits en croix : $5 \times 7 = 35$ et $4 \times 9 = 36$, donc $\frac{5}{4} < \frac{9}{7}$.

Entre $\frac{7}{9}$ et $\frac{3}{4}$: $7 \times 4 = 28$ et $9 \times 3 = 27$, donc $\frac{7}{9} > \frac{3}{4}$.

Étape 3 — trier les négatifs. $\frac{2}{3} < 1 < \frac{5}{4}$, donc en passant à l'opposé l'ordre s'inverse : $-\frac{5}{4} < -1 < -\frac{2}{3}$.

Classement décroissant.

$$\frac{9}{7} > \frac{5}{4} > \frac{7}{9} > \frac{3}{4} > 0 > -\frac{2}{3} > -1 > -\frac{5}{4}$$

Ce qu'il faut retenir. On n'a jamais eu besoin d'un dénominateur commun aux huit nombres : trier par signe, puis par rapport à 1, réduit le travail à deux petites comparaisons.

Réponse. $\frac{9}{7} > \frac{5}{4} > \frac{7}{9} > \frac{3}{4} > 0 > -\frac{2}{3} > -1 > -\frac{5}{4}$.