Plaquette 3 – Additionner et soustraire des fractions

Nombres rationnels — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Même dénominateur. On ajoute (ou on retranche) les numérateurs, on garde le dénominateur :

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c} \qquad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

Dénominateurs différents. On réduit d'abord au même dénominateur avec la règle fondamentale, puis on applique la formule précédente :

$$\frac{a}{b}=\frac{a\times k}{b\times k}$$

Méthode en trois temps : chercher un multiple commun aux dénominateurs — réécrire chaque fraction — ajouter les numérateurs, puis simplifier.

Un entier est une fraction de dénominateur 1 :

$$3=\frac{3}{1}=\frac{3\times 5}{5}=\frac{15}{5}$$

Soustraire, c'est ajouter l'opposé.

$$\frac{a}{c}-\left(-\frac{b}{c}\right)=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$$

Compléments utiles.

Écriture	Valeur
$\frac{a}{b}+\frac{b-a}{b}$	1
$\frac{a}{b}-\frac{a}{b}$	0
$\frac{a}{b}+0$	$\frac{a}{b}$

Les deux erreurs à ne jamais commettre : additionner les dénominateurs entre eux, et oublier de simplifier le résultat final.

Correction de l'exercice 1 – Même dénominateur

La règle du cours. À dénominateur commun, on opère sur les numérateurs seulement :

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c} \qquad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

a) $\frac{3}{11}+\frac{5}{11}=\frac{3+5}{11}=\frac{8}{11}$, déjà irréductible.

b) $\frac{9}{4}-\frac{1}{4}=\frac{8}{4}=2$. Le résultat est un entier : c'est possible, et il faut aller jusque-là.

c) $-\frac{7}{15}+\frac{4}{15}=\frac{-7+4}{15}=\frac{-3}{15}=-\frac{1}{5}$ (simplification par 3).

d) $\frac{5}{6}-\frac{11}{6}=\frac{5-11}{6}=\frac{-6}{6}=-1$.

L'erreur à éviter. Le dénominateur ne bouge pas : écrire $\frac{3}{11}+\frac{5}{11}=\frac{8}{22}$ reviendrait à

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

changer la taille des parts en cours de calcul.

Réponse. a) $\frac{8}{11}$ — b) 2 — c) $-\frac{1}{5}$ — d) -1.

Correction de l’exercice 2 – Un dénominateur multiple de l’autre

Le raccourci. Quand un dénominateur est multiple de l’autre, il sert directement de dénominateur commun : une seule fraction est à réécrire.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$$

a) $12 = 4 \times 3$, donc $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$:

$$\frac{9}{12} + \frac{5}{12} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$$

(simplification par 2).

b) $10 = 5 \times 2$, donc $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ et $\frac{7}{10} - \frac{6}{10} = \frac{1}{10}$.

c) $21 = 3 \times 7$, donc $\frac{1}{3} = \frac{7}{21}$ et $\frac{7}{21} + \frac{5}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$ (simplification par 3).

Le réflexe à prendre. Avant de multiplier les deux dénominateurs entre eux, toujours vérifier si l’un est déjà multiple de l’autre : cela divise le travail par deux et évite d’avoir à simplifier de gros nombres à la fin.

Réponse. a) $\frac{7}{6}$ — b) $\frac{1}{10}$ — c) $\frac{4}{7}$.

Correction de l’exercice 3 – Dénominateurs quelconques

La méthode complète. On cherche un multiple commun aux deux dénominateurs, on réécrit, puis on additionne les numérateurs :

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

a) Multiple commun à 3 et 4 : 12.

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$$

b) Multiple commun à 6 et 8 : 24 (et non 48).

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{8} = \frac{20}{24} - \frac{9}{24} = \frac{11}{24}$$

c) Multiple commun à 9 et 15 : 45.

$$\frac{4}{9} + \frac{7}{15} = \frac{20}{45} + \frac{21}{45} = \frac{41}{45}$$

Contrôle d’ordre de grandeur. En b), $\frac{5}{6} \approx 0{,}83$ et $\frac{3}{8} \approx 0{,}38$: la différence doit valoir environ 0,45, et $\frac{11}{24} \approx 0{,}46$ ✓ Ce contrôle détecte immédiatement une erreur de réduction.

Réponse. a) $\frac{11}{12}$ — b) $\frac{11}{24}$ — c) $\frac{41}{45}$.

Correction de l’exercice 4 – Ajouter un entier

Le point de départ. Un entier est une fraction de dénominateur 1, qu’on réécrit au dénominateur voulu :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$n = \frac{n}{1} = \frac{n \times b}{b}$$

a) $2 = \frac{10}{5}$, donc $2 + \frac{3}{5} = \frac{10+3}{5} = \frac{13}{5}$.

b) $3 = \frac{12}{4}$, donc $\frac{7}{4} - 3 = \frac{7-12}{4} = -\frac{5}{4}$. Le résultat est négatif, ce qui était prévisible : $\frac{7}{4} = 1{,}75$ est plus petit que 3.

c) $-1 = -\frac{6}{6}$, donc $-1 + \frac{5}{6} = \frac{-6+5}{6} = -\frac{1}{6}$.

d) $4 = \frac{8}{2}$, donc $4 - \frac{9}{2} = \frac{8-9}{2} = -\frac{1}{2}$.

Le contrôle de signe. Avant de calculer, comparer les deux nombres suffit à annoncer le signe du résultat : en d), $4 < 4{,}5$ donc la différence est négative. Une erreur de signe se repère ainsi sans refaire le calcul.

Réponse. a) $\frac{13}{5}$ — b) $-\frac{5}{4}$ — c) $-\frac{1}{6}$ — d) $-\frac{1}{2}$.

Correction de l’exercice 5 – Trois fractions à la suite

Premier chemin — tout réduire d’un coup. Un multiple commun à 2, 3 et 4 est 12 :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{6+4-3}{12} = \frac{7}{12}$$

Second chemin — commencer par la soustraction.

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$$

puis $\frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{6}{12} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$.

Les deux résultats coïncident, et c’est normal : l’addition est associative et commutative, et soustraire revient à ajouter l’opposé. On peut donc regrouper les termes dans l’ordre le plus commode.

Ce qu’il faut en tirer. Réduire les trois fractions en une seule fois est plus rapide dès qu’un multiple commun saute aux yeux ; regrouper deux termes d’abord est utile quand deux dénominateurs seulement sont proches.

Réponse. $\frac{7}{12}$ par les deux chemins.

Correction de l’exercice 6 – L’erreur d’Inès

a) $\frac{1}{2} = 0{,}5$ et $\frac{1}{3} \approx 0{,}33$: la somme dépasse 0,5, elle vaut environ 0,83. Or $\frac{2}{5} = 0{,}4$, un nombre **plus petit que le premier terme**. Une somme de deux nombres positifs ne peut pas être inférieure à l’un d’eux : le résultat est faux avant même tout calcul.

b) On réduit au dénominateur 6 :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

c) **L’image.** Une pizza coupée en deux et une pizza coupée en trois : une demi-part et un tiers de part ne sont pas des parts de même taille, on ne peut pas les compter ensemble. Il faut d’abord recouper les deux pizzas en sixièmes — c’est exactement ce que fait la réduction au même dénominateur. La règle du cours porte bien sur les numérateurs seuls :

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

À retenir. Comparer la somme à son plus grand terme est un contrôle gratuit qui élimine cette erreur à tous les coups.

Réponse. a) impossible, $\frac{2}{5} < \frac{1}{2}$ — b) $\frac{5}{6}$.

Correction de l'exercice 7 – Le terme manquant

Le principe. On isole le terme cherché en faisant l'opération inverse.

a) Le complément à 1 s'obtient en soustrayant :

$$1 - \frac{3}{8} = \frac{8}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

b) Le nombre cherché vaut $\frac{1}{10} + \frac{2}{5}$. Comme $10 = 5 \times 2$: $\frac{1}{10} + \frac{4}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

c) Le nombre cherché vaut $\frac{1}{2} - \frac{5}{6} = \frac{3}{6} - \frac{5}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$. Il est **négatif**, et c'est logique : on part de $\frac{5}{6}$ pour arriver à $\frac{1}{2}$, plus petit, donc on a retranché quelque chose.

La vérification. On remplace et on recalcule : $\frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ✓ Cette vérification prend dix secondes et sécurise toute la question.

Réponse. a) $\frac{5}{8}$ — b) $\frac{1}{2}$ — c) $-\frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 8 – Avec des parenthèses

La priorité. On calcule d'abord ce qui est entre parenthèses.

a) $\frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{2}{10} + \frac{5}{10} = \frac{7}{10}$, donc

$$\frac{7}{10} - \frac{7}{10} = 0$$

b) $\frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{9}{12} - \frac{4}{12} = \frac{5}{12}$, puis $\frac{5}{12} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12} + \frac{2}{12} = \frac{7}{12}$.

c) $\frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6} - \frac{3}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, puis $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

Le piège du signe moins devant une parenthèse. En c), supprimer la parenthèse sans précaution donnerait $\frac{2}{3} - \frac{5}{6} - \frac{1}{2}$, ce qui est faux : le moins change **tous** les signes à l'intérieur.

$$\frac{2}{3} - \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} - \frac{5}{6} + \frac{1}{2}$$

On retrouve bien $\frac{4}{6} - \frac{5}{6} + \frac{3}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ✓

Réponse. a) 0 — b) $\frac{7}{12}$ — c) $\frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 9 – Les soustractions de négatifs

La règle. Soustraire un nombre, c'est ajouter son opposé :

$$x - (-y) = x + y \qquad x - y = x + (-y)$$

a) $\frac{1}{4} - \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$.

b) Les deux termes sont retranchés au total : $-\frac{2}{3} - \frac{5}{6} = -\frac{4}{6} - \frac{5}{6} = \frac{-4-5}{6} = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$.

c) $-\frac{7}{8} - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{8} + \frac{1}{2} = -\frac{7}{8} + \frac{4}{8} = -\frac{3}{8}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Le contrôle de bon sens, cas par cas. En a) on enlève une dette, donc on augmente : le résultat devait être plus grand que $\frac{1}{4}$ ✓ En b) on part d'un négatif et on enlève encore : le résultat devait être plus négatif que $-\frac{2}{3}$ ✓ En c) on ajoute $\frac{1}{2}$ à $-\frac{7}{8}$, sans atteindre 0 puisque $\frac{1}{2} < \frac{7}{8}$ ✓

Réponse. a) 1 — b) $-\frac{3}{2}$ — c) $-\frac{3}{8}$.

Correction de l'exercice 10 – La somme dépasse-t-elle 1 ?

La stratégie. On compare chaque terme à $\frac{1}{2}$, repère facile à évaluer : une fraction dépasse $\frac{1}{2}$ quand son numérateur dépasse la moitié de son dénominateur.

a) $\frac{3}{7} < \frac{1}{2}$ (car $3 < 3{,}5$) mais $\frac{3}{5} > \frac{1}{2}$. Il faut trancher par le calcul :

$$\frac{3}{7} + \frac{3}{5} = \frac{15}{35} + \frac{21}{35} = \frac{36}{35} > 1$$

b) $\frac{2}{9} < \frac{1}{2}$ et $\frac{5}{11} < \frac{1}{2}$: la somme de deux nombres inférieurs à $\frac{1}{2}$ reste **inférieure à** 1, sans aucun calcul. Vérification : $\frac{22}{99} + \frac{45}{99} = \frac{67}{99} < 1$ ✓

c) $\frac{4}{7} > \frac{1}{2}$ et $\frac{3}{8} < \frac{1}{2}$, cas indécis. Calcul : $\frac{32}{56} + \frac{21}{56} = \frac{53}{56} < 1$.

La leçon. Le repère $\frac{1}{2}$ conclut tout de suite quand les deux termes sont du même côté ; sinon il faut calculer. C'est un tri rapide, pas une preuve universelle.

Réponse. a) $\frac{36}{35} > 1$ — b) $\frac{67}{99} < 1$ — c) $\frac{53}{56} < 1$.

Correction de l'exercice 11 – Le réservoir

a) On suit les étapes en prenant la capacité pour unité. Dénominateur commun à 5, 4 et 10 : 20.

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{12}{20} + \frac{5}{20} - \frac{2}{20} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

Le réservoir est donc rempli aux trois quarts.

b) Après le versement, il contenait $\frac{12}{20} + \frac{5}{20} = \frac{17}{20}$ de sa capacité. Comme $\frac{17}{20} < 1$, il n'a **pas débordé**. Le contrôle était indispensable : le résultat final ne dit rien de ce qui s'est passé en chemin.

c) Prendre les trois quarts de 200 L :

$$200 \times \frac{3}{4} = \frac{600}{4} = 150$$

Il reste 150 L.

Ce que le problème apprend. Les fractions portent toutes sur **la même unité** — la capacité du réservoir — ce qui autorise à les additionner. Si l'une portait sur le contenu au lieu de la capacité, l'addition n'aurait plus de sens.

Réponse. a) $\frac{3}{4}$ — b) non, $\frac{17}{20} < 1$ — c) 150 L.

Correction de l'exercice 12 – Le budget du mois

a) Dénominateur commun à 3, 5 et 6 : 30.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{10}{30}+\frac{6}{30}+\frac{5}{30}=\frac{21}{30}=\frac{7}{10}$$

Ces trois postes consomment $\frac{7}{10}$ du budget, soit 70%.

b) Le reste est le complément à 1 :

$$1-\frac{7}{10}=\frac{10}{10}-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$$

c) $2400\times\frac{3}{10}=\frac{7200}{10}=720$ €.

Le contrôle par les euros. Logement : $2400\times\frac{1}{3}=800$ € ; alimentation : $2400\times\frac{1}{5}=480$ € ; transports : $2400\times\frac{1}{6}=400$ €. Total $800+480+400=1680$ €, et $2400-1680=720$ € ✓ Les deux chemins concordent, ce qui valide la réduction au dénominateur 30.

Réponse. a) $\frac{7}{10}$ — b) $\frac{3}{10}$ — c) 720 €.

Correction de l’exercice 13 – Une somme qui s’accumule

a) On réduit à chaque étape au plus grand dénominateur :

$$S_2=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\qquad S_3=\frac{6}{8}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

puis $S_4=\frac{14}{16}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$.

b) $1-S_4=\frac{16}{16}-\frac{15}{16}=\frac{1}{16}$. On remarque que **ce qui manque à** 1 **est exactement le dernier terme ajouté** : $1-S_2=\frac{1}{4}$, $1-S_3=\frac{1}{8}$, $1-S_4=\frac{1}{16}$.

c) **Non.** À chaque étape, on ajoute la moitié de ce qui manque pour atteindre 1 : on s’en approche sans jamais l’atteindre. La somme suivante vaudrait $\frac{31}{32}$, puis $\frac{63}{64}$, toujours inférieures à 1.

L’image. Un marcheur qui parcourt à chaque pas la moitié de la distance restante ne franchit jamais la ligne d’arrivée, même s’il s’en approche autant qu’on veut.

Réponse. a) $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{15}{16}$ — b) $1-S_4=\frac{1}{16}$ — c) non, jamais.

Correction de l’exercice 14 – La planche découpée

a) On retranche les deux morceaux. Dénominateur commun à 4, 6 et 8 : 24.

$$\frac{9}{4}-\frac{5}{6}-\frac{3}{8}=\frac{54}{24}-\frac{20}{24}-\frac{9}{24}=\frac{54-20-9}{24}=\frac{25}{24}$$

Il reste $\frac{25}{24}$ de mètre.

b) On compare $\frac{25}{24}$ à $1=\frac{24}{24}$: comme $25>24$, il reste **un peu plus d’un mètre**. La pièce de 1 m peut donc être découpée, et il restera alors $\frac{25}{24}-\frac{24}{24}=\frac{1}{24}$ de mètre.

c) $\frac{25}{24}$ m $=\frac{2500}{24}$ cm $\approx 104{,}2$ cm.

Le contrôle d’ordre de grandeur. La planche fait 2,25 m, on a enlevé environ $0{,}83+0{,}375\approx 1{,}21$ m : il devait rester environ 1,04 m ✓ Ce contrôle décimal, fait en une ligne, sécurise la réduction au dénominateur 24.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. a) $\frac{25}{24}$ m — b) oui, il resterait $\frac{1}{24}$ m — c) environ 104,2 cm.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : le livre de Sarah

a) Dénominateur commun à 4, 6 et 9 : 36.

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{2}{9}=\frac{9}{36}+\frac{6}{36}+\frac{8}{36}=\frac{23}{36}$$

b) Il lui reste $1-\frac{23}{36}=\frac{36}{36}-\frac{23}{36}=\frac{13}{36}$ du livre.

c) $324\times\frac{13}{36}=\frac{4212}{36}=117$ pages. (Le calcul tombe juste car 324 est un multiple de 36 : $324=36\times9$, donc $9\times13=117$.)

d) On compare $\frac{1}{3}$ à ce qui reste, soit $\frac{13}{36}$:

$$\frac{1}{3}=\frac{12}{36}<\frac{13}{36}$$

Elle n’aura donc **pas** terminé : il lui restera $\frac{13}{36}-\frac{12}{36}=\frac{1}{36}$ du livre, soit 9 pages.

Le fil du problème. Toutes les fractions se rapportent au livre entier, ce qui autorise additions et soustractions ; la dernière question montre qu’on peut comparer deux fractions plutôt que repasser par les pages.

Réponse. a) $\frac{23}{36}$ — b) $\frac{13}{36}$ — c) 117 pages — d) non, il restera 9 pages.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).