

Plaquette 4 – Multiplier et diviser des fractions

Nombres rationnels – Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Produit.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \quad (b \neq 0 \text{ et } d \neq 0)$$

Simplifier avant de multiplier : tout facteur commun à un numérateur et à un dénominateur peut être supprimé avant le calcul.

$$\frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{4 \times 3}{9 \times 8} = \frac{1}{3 \times 2} = \frac{1}{6}$$

Inverse. L'inverse de $\frac{a}{b}$ (avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$) est $\frac{b}{a}$: on échange numérateur et dénominateur. Leur produit vaut 1 :

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$$

Division. Diviser, c'est multiplier par l'inverse :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Fraction d'une quantité. « Les $\frac{3}{5}$ de N » se traduit par un produit :

$$\frac{3}{5} \text{ de } N = \frac{3}{5} \times N$$

Règle des signes — identique à celle des entiers relatifs :

Facteurs	Résultat
deux positifs	positif
deux négatifs	positif
un de chaque	négatif

Puissance d'une fraction.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Attention. Multiplier par un nombre **inférieur à 1** diminue : $20 \times \frac{3}{4} = 15$.

Correction de l'exercice 1 – Simplifier avant de multiplier

La règle du cours.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Plutôt que de multiplier puis simplifier, on repère les facteurs communs dans les deux sens.

a) $\frac{3}{5} \times \frac{10}{9} = \frac{3 \times 10}{5 \times 9}$. Or $10 = 5 \times 2$ et $9 = 3 \times 3$, donc le 3 et le 5 disparaissent :

$$\frac{3 \times 5 \times 2}{5 \times 3 \times 3} = \frac{2}{3}$$

b) $\frac{7}{12} \times \frac{8}{21} : 21 = 7 \times 3$ et $12 = 4 \times 3$, $8 = 4 \times 2$. Il reste $\frac{1 \times 2}{3 \times 3} = \frac{2}{9}$.

c) $\frac{15}{16} \times \frac{4}{25} : 15 = 5 \times 3$, $25 = 5 \times 5$, $16 = 4 \times 4$. Il reste $\frac{3 \times 1}{4 \times 5} = \frac{3}{20}$.

Pourquoi simplifier d'abord. En b), le calcul direct donnerait $\frac{56}{252}$: exact, mais il faut ensuite trouver que le PGCD vaut 28. Simplifier avant évite ce détour et les erreurs de multiplication.

Réponse. a) $\frac{2}{3}$ — b) $\frac{2}{9}$ — c) $\frac{3}{20}$.

Correction de l'exercice 2 - Prendre une fraction d'une quantité

La traduction du cours. « Les $\frac{a}{b}$ de N » signifie $\frac{a}{b} \times N$:

$$\frac{a}{b} \times N = \frac{a \times N}{b}$$

a) $\frac{3}{4} \times 60 = \frac{180}{4} = 45$. On peut aussi diviser d'abord : $60 \div 4 = 15$, puis $15 \times 3 = 45$.

b) $\frac{2}{7} \times 105 = \frac{210}{7} = 30$. Ici $105 \div 7 = 15$ puis $15 \times 2 = 30$ va plus vite.

c) $\frac{5}{6} \times 27 = \frac{135}{6} = \frac{45}{2} = 22,5$. Le résultat n'est pas entier, et c'est normal : 27 n'est pas un multiple de 6.

d) $\frac{7}{10} \times 45 = \frac{315}{10} = 31,50$ €.

Le réflexe de contrôle. Toutes ces fractions étant inférieures à 1, chaque résultat doit être **plus petit** que la quantité de départ : $45 < 60$, $30 < 105$, $22,5 < 27$, $31,50 < 45$ ✓

Réponse. a) 45 — b) 30 — c) 22,5 — d) 31,50 €.

Correction de l'exercice 3 - Inverses

a) **La règle.** L'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$, car leur produit vaut 1 :

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{a \times b}{b \times a} = 1$$

— inverse de $\frac{3}{7} : \frac{7}{3}$;

— inverse de $5 = \frac{5}{1} : \frac{1}{5}$;

— inverse de $-\frac{2}{9} : -\frac{9}{2}$ (le signe se conserve, car un produit de deux négatifs doit valoir +1) ;

— inverse de $1 : 1$.

b) **Zéro n'a pas d'inverse.** Il faudrait un nombre x tel que $0 \times x = 1$, or tout produit par 0 vaut 0. C'est la raison pour laquelle on ne divise jamais par 0.

c) Oui : $1 \times 1 = 1$ et $(-1) \times (-1) = 1$. Ce sont les deux seuls cas.

Ne pas confondre. L'**opposé** de $\frac{3}{7}$ est $-\frac{3}{7}$ (somme nulle) ; son **inverse** est $\frac{7}{3}$ (produit égal à 1). Deux notions, deux opérations.

Réponse. a) $\frac{7}{3}$; $\frac{1}{5}$; $-\frac{9}{2}$; 1 — b) 0 — c) oui : 1 et -1.

Correction de l'exercice 4 - Diviser deux fractions

La règle du cours. Diviser par une fraction, c'est multiplier par son inverse :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

a) $\frac{4}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{4}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{4 \times 3}{5 \times 2} = \frac{6}{5}$ (on simplifie le 2 avec le 4).

b) $\frac{7}{9} \div \frac{14}{3} = \frac{7}{9} \times \frac{3}{14}$. Comme $14 = 7 \times 2$ et $9 = 3 \times 3$, il reste $\frac{1}{3 \times 2} = \frac{1}{6}$.

c) $10 = \frac{10}{1}$, donc $\frac{5}{6} \div 10 = \frac{5}{6} \times \frac{1}{10} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$.

Le contrôle de bon sens. En a), on divise par $\frac{2}{3}$, un nombre **inférieur à 1** : le résultat doit être plus grand que $\frac{4}{5}$, et $\frac{6}{5} > \frac{4}{5}$ ✓ En c), on divise par 10 : le résultat doit être dix fois plus petit ✓

Réponse. a) $\frac{6}{5}$ — b) $\frac{1}{6}$ — c) $\frac{1}{12}$.

Correction de l'exercice 5 - Fractions étagées

Lire la grande barre comme une division. Une fraction étagée est une division déguisée :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

$A = \frac{3}{4} \times \frac{8}{9}$. Or $8 = 4 \times 2$ et $9 = 3 \times 3$, donc $A = \frac{2}{3}$.

$B = \frac{2}{5} \div 6 = \frac{2}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$.

$C = 12 \div \frac{3}{7} = 12 \times \frac{7}{3} = \frac{84}{3} = 28$.

Le point de vigilance. La barre principale doit être identifiée sans hésitation : c'est celle qui est la plus longue, alignée avec le signe d'égalité. Écrire $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{8}}$ en $\frac{3}{4} \div \frac{9}{8}$ est le seul geste à faire ; ensuite, ce n'est plus qu'un produit.

Contrôle sur C. Diviser par $\frac{3}{7}$, plus petit que 1, doit augmenter : $28 > 12$ ✓

Réponse. $A = \frac{2}{3}$, $B = \frac{1}{15}$, $C = 28$.

Correction de l'exercice 6 - Chaîne de produits

Le principe. On écrit un seul grand quotient, puis on barre les facteurs communs avant tout calcul :

$$P = \frac{2 \times 9 \times 5 \times 4}{3 \times 10 \times 6 \times 7}$$

On décompose : $9 = 3 \times 3$, $10 = 5 \times 2$, $6 = 3 \times 2$, $4 = 2 \times 2$.

$$P = \frac{2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 2 \times 2}{3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 2 \times 7}$$

Au numérateur comme au dénominateur on trouve 3, 3, 5, 2, 2 : tout se simplifie sauf un 2 en haut et un 7 en bas.

$$P = \frac{2}{7}$$

Contrôle décimal. $\frac{2}{3} \approx 0,67$, $\frac{9}{10} = 0,9$, $\frac{5}{6} \approx 0,83$, $\frac{4}{7} \approx 0,57$: le produit vaut environ 0,29, et $\frac{2}{7} \approx 0,286$ ✓

Ce qu'il faut retenir. Calculer $2 \times 9 \times 5 \times 4 = 360$ et $3 \times 10 \times 6 \times 7 = 1260$ donne le même résultat, mais oblige ensuite à simplifier $\frac{360}{1260}$: quatre multiplications et une recherche de PGCD au lieu de quelques barrages.

Réponse. $P = \frac{2}{7}$.

Correction de l'exercice 7 - Signes dans un produit

La règle des signes. Deux facteurs de même signe donnent un résultat positif, de signes contraires un résultat négatif — pour le produit comme pour le quotient.

a) Un négatif et un positif : le résultat est **négatif**.

$$-\frac{3}{5} \times \frac{10}{9} = -\frac{3 \times 10}{5 \times 9} = -\frac{2}{3}$$

b) Deux négatifs : le résultat est **positif**. Avec $21 = 7 \times 3$ et $8 = 4 \times 2$:

$$-\frac{4}{7} \times \left(-\frac{21}{8}\right) = \frac{4 \times 21}{7 \times 8} = \frac{3}{2}$$

c) Un positif divisé par un négatif : le résultat est **négatif**.

$$\frac{5}{6} \div \left(-\frac{15}{4}\right) = -\frac{5}{6} \times \frac{4}{15} = -\frac{20}{90} = -\frac{2}{9}$$

La bonne habitude. Décider du signe en premier, puis calculer avec les valeurs positives : on ne traîne pas les signes moins dans tout le calcul, où ils finissent par s'égarer.

Réponse. a) $-\frac{2}{3}$ — b) $\frac{3}{2}$ — c) $-\frac{2}{9}$.

Correction de l'exercice 8 - Puissance d'une fraction

La règle du cours.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$.

b) L'exposant 2 est pair, donc le résultat est positif : $\left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$.

c) $\left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{16}{49}$, puis

$$\frac{16}{49} \times \frac{49}{8} = \frac{16}{8} = 2$$

(les 49 se simplifient, et $16 = 8 \times 2$).

Le piège des parenthèses. $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ et $\frac{2^3}{3}$ ne sont pas le même nombre : le premier vaut $\frac{8}{27}$, le second $\frac{8}{3}$. L'exposant ne porte sur le dénominateur que s'il y a une parenthèse autour de toute la fraction.

Réponse. a) $\frac{8}{27}$ — b) $\frac{9}{25}$ — c) 2.

Correction de l'exercice 9 - L'affirmation de Théo

a) Les deux calculs, avec les règles du cours :

$$30 \times \frac{2}{5} = \frac{60}{5} = 12 \quad 30 \div \frac{2}{5} = 30 \times \frac{5}{2} = \frac{150}{2} = 75$$

b) La multiplication a **diminué** le nombre ($12 < 30$) et la division l'a **augmenté** ($75 > 30$) : l'affirmation de Théo est fausse dans les deux sens. Elle n'est vraie que pour les facteurs supérieurs à 1, ce qu'il n'a pas précisé.

c) **Règle correcte** (pour un nombre positif N) :

Facteur	Effet du produit	Effet du quotient
supérieur à 1	augmente	diminue
égal à 1	inchangé	inchangé
entre 0 et 1	diminue	augmente

Pourquoi c'est logique. Prendre les $\frac{2}{5}$ de quelque chose, c'est en garder moins de la moitié. À l'inverse, se demander « combien de fois $\frac{2}{5}$ tient-il dans 30 ? » revient à compter de petits morceaux : il y en a forcément beaucoup.

Réponse. a) 12 et 75 — b) affirmation fausse — c) tout dépend si le facteur dépasse 1 ou non.

Correction de l'exercice 10 - Produits et sommes mélangés

La priorité. Multiplications et divisions passent avant additions et soustractions ; les parenthèses passent avant tout.

a) D'abord le produit : $\frac{2}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. Puis

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

b) D'abord la parenthèse : $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6}$. Puis $\frac{7}{6} \times \frac{3}{8} = \frac{7}{16}$ (le 3 se simplifie avec le 6).

c) D'abord la division : $\frac{1}{3} \div \frac{2}{9} = \frac{1}{3} \times \frac{9}{2} = \frac{3}{2}$. Puis

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{2} = \frac{5}{6} - \frac{9}{6} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

La comparaison a) / b). Mêmes nombres, mêmes opérations, résultats différents ($\frac{3}{4}$ contre $\frac{7}{16}$) : les parenthèses ne sont pas décoratives, elles changent le nombre calculé.

Réponse. a) $\frac{3}{4}$ — b) $\frac{7}{16}$ — c) $-\frac{2}{3}$.

Correction de l'exercice 11 - La fraction d'une fraction

a) « $\frac{2}{9}$ parmi les $\frac{3}{5}$ » se traduit par un produit :

$$\frac{2}{9} \times \frac{3}{5} = \frac{2 \times 3}{9 \times 5} = \frac{2}{15}$$

(le 3 se simplifie avec le 9).

$$b) 450 \times \frac{2}{15} = \frac{900}{15} = 60 \text{ élèves.}$$

Vérification par étapes. Demi-pensionnaires : $450 \times \frac{3}{5} = 270$. Parmi eux : $270 \times \frac{2}{9} = 60$
 ✓ Les deux chemins concordent.

c) Parce que les deux fractions ne portent pas sur la même référence : $\frac{3}{5}$ se rapporte à **tout le collège**, $\frac{2}{9}$ seulement aux **demi-pensionnaires**. On ne peut additionner que des fractions d'un même tout. Ici on emboîte une part dans une autre, ce qui est un produit.

Le contrôle d'ordre de grandeur. $\frac{2}{15} \approx 0,13$: environ 13% des élèves, un nombre plus petit que chacune des deux fractions de départ. Une part d'une part est toujours plus petite que les deux.

Réponse. a) $\frac{2}{15}$ — b) 60 élèves — c) les fractions ne portent pas sur le même ensemble.

Correction de l'exercice 12 - La maquette

a) On applique l'échelle :

$$12,5 \times \frac{1}{50} = \frac{12,5}{50} = 0,25 \text{ m} = 25 \text{ cm}$$

b) Passer de la maquette au réel, c'est faire l'opération inverse : diviser par $\frac{1}{50}$, donc multiplier par 50.

$$3 \div \frac{1}{50} = 3 \times 50 = 150 \text{ cm} = 1,5 \text{ m}$$

c) **La multiplication par 50**, qui est l'inverse de $\frac{1}{50}$:

$$\frac{1}{50} \times 50 = 1$$

Multiplier par un nombre puis par son inverse ramène au point de départ : c'est exactement ce qui fait des deux conversions des opérations réciproques.

Le contrôle. Les longueurs de maquette doivent être 50 fois plus petites : 25 cm pour 12,5 m = 1250 cm ✓ ($1250 \div 50 = 25$).

Réponse. a) 25 cm — b) 1,5 m — c) multiplier par 50, l'inverse de $\frac{1}{50}$.

Correction de l'exercice 13 - Combien de portions ?

a) « Combien de fois $\frac{3}{8}$ tient-il dans $\frac{15}{4}$? » est une division :

$$\frac{15}{4} \div \frac{3}{8} = \frac{15}{4} \times \frac{8}{3} = \frac{15 \times 8}{4 \times 3} = 10$$

(le 3 se simplifie avec le 15, le 4 avec le 8). Il peut servir **exactement 10 portions**.

b) Le quotient tombe juste, donc il ne reste rien : $10 \times \frac{3}{8} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$ ✓

c) Pour 12 portions :

$$12 \times \frac{3}{8} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ L}$$

Il lui manquerait $\frac{9}{2} - \frac{15}{4} = \frac{18}{4} - \frac{15}{4} = \frac{3}{4}$ de litre, soit exactement deux portions.

Reconnaître l'opération. « Combien de fois A tient dans B » : division. « Quelle quantité pour n fois A » : multiplication. C'est le sens de la phrase, pas les nombres, qui décide.

Réponse. a) 10 portions — b) aucun reste — c) 4,5 L, soit $\frac{3}{4}$ L de plus.

Correction de l'exercice 14 - Le trajet en deux temps

a) Après le matin, il reste $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ du trajet. L'après-midi, il en parcourt les deux tiers :

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

b) Il a parcouru en tout $\frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{9}{12} + \frac{2}{12} = \frac{11}{12}$ du trajet. Il lui reste donc

$$1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$$

On peut le retrouver autrement : il reste le tiers de $\frac{1}{4}$, soit $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ ✓

c) $84 \times \frac{1}{12} = 7$ km.

Le piège du problème. Le « $\frac{2}{3}$ » ne porte pas sur le trajet entier mais sur **le reste** : c'est ce qui impose un produit de fractions. Un élève qui calcule $\frac{3}{4} + \frac{2}{3}$ obtient $\frac{17}{12} > 1$, résultat manifestement impossible.

Réponse. a) $\frac{1}{6}$ — b) $\frac{1}{12}$ — c) 7 km.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : l'aquarium

a) Le volume est une fraction de la contenance, donc un produit :

$$\frac{2}{3} \times \frac{9}{2} = \frac{2 \times 9}{3 \times 2} = 3 \text{ L}$$

b) Vider de moitié revient à multiplier la part remplie par $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Il reste donc le tiers de la contenance, soit $\frac{1}{3} \times \frac{9}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$ L.

c) Il manque $\frac{9}{2} - \frac{3}{2} = \frac{6}{2} = 3$ L. On divise par la contenance du verre :

$$3 \div \frac{1}{4} = 3 \times 4 = 12$$

Il faut 12 versements.

Le fil du problème. Les trois questions utilisent les trois gestes du chapitre : produit pour prendre une part, produit encore pour prendre une part d'une part, division pour compter combien de fois une quantité tient dans une autre. Contrôle final : $12 \times \frac{1}{4} = 3$ L ✓

Réponse. a) 3 L — b) $\frac{1}{3}$ de la contenance, soit 1,5 L — c) 12 versements.