

Plaquette 5 – Bilan et problèmes

Nombres rationnels — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les quatre opérations, en un tableau.

Opération	Règle
addition	$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$
soustraction	$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$
produit	$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$
quotient	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

Addition et soustraction supposent les deux fractions **réduites au même dénominateur** ; le produit et le quotient n'en ont pas besoin.

Traduire les énoncés.

Formulation	Opération
« les $\frac{a}{b}$ de N »	$\frac{a}{b} \times N$
« il reste »	$1 - \frac{a}{b}$
« les $\frac{a}{b}$ du reste »	produit de deux fractions
« combien de fois $\frac{a}{b}$ tient dans N »	$N \div \frac{a}{b}$

Priorités. Parenthèses, puis puissances, puis produits et quotients, puis sommes et différences.

Complément à 1.

$$1 - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b}$$

Les trois contrôles de fin. Le résultat est-il du bon signe ? Est-il du bon ordre de grandeur en décimal ? La fraction est-elle irréductible ?

Correction de l'exercice 1 – Trois expressions à calculer

A – le produit passe avant la somme.

$$\frac{1}{6} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

puis $A = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1.$

B – la parenthèse d'abord. $\frac{5}{3} - \frac{1}{2} = \frac{10}{6} - \frac{3}{6} = \frac{7}{6}$, donc

$$B = \frac{7}{6} \div \frac{7}{6} = 1$$

Un nombre divisé par lui-même vaut 1 : inutile de dérouler le produit par l'inverse.

C — parenthèse, produit, puis soustraction. $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$, puis $\frac{2}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{1}{2}$, et enfin

$$C = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{5}{10} - \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Ce que ces trois calculs montrent. Repérer la structure avant de se lancer fait gagner du temps : dans B , reconnaître deux quantités égales évite tout le calcul ; dans C , la simplification $\frac{2}{5} \times \frac{5}{4}$ tombe d'elle-même.

Réponse. $A = 1$, $B = 1$, $C = \frac{2}{5}$.

Correction de l'exercice 2 - Un programme de calcul

a) **Avec 3.** $3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$, puis

$$\frac{7}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

et enfin $\frac{7}{3} - \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2$.

Avec $-\frac{1}{2}$. $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$, puis $0 \times \frac{2}{3} = 0$, et enfin $0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$.

b) La première étape **annule** le nombre : tout ce qui suit part de zéro. Le résultat $-\frac{1}{3}$ est le plus petit que ce programme puisse produire à partir d'un nombre supérieur à $-\frac{1}{2}$, puisque toutes les étapes suivantes conservent l'ordre.

c) $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$, puis $\frac{5}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$, et enfin

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

La bonne méthode. On exécute les étapes **dans l'ordre**, en simplifiant à chaque fois : garder $\frac{10}{12}$ jusqu'au bout compliquerait la soustraction finale.

Réponse. a) 2 et $-\frac{1}{3}$ — b) la première étape annule le nombre — c) $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 3 - Vrai ou faux, avec justification

a) **Vrai.** Produits en croix : $4 \times 9 = 36$ et $6 \times 6 = 36$. Les deux valent $\frac{2}{3}$ sous forme irréductible.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{équivaut à} \quad a \times d = b \times c$$

b) **Faux.** À dénominateur commun, le dénominateur ne change pas :

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

Or $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, soit la moitié du vrai résultat. C'est l'erreur qui consiste à additionner aussi les dénominateurs.

c) **Faux.** L'inverse de $-\frac{3}{4}$ est $-\frac{4}{3}$: le produit doit valoir 1, donc les deux nombres ont le même signe. Ici $-\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = -1$, et non 1.

d) **Vrai.** $\frac{7}{8} \times \frac{8}{56} = \frac{56}{56} = 1$: ce sont deux nombres inverses l'un de l'autre.

Ce que ce type de question teste. Chaque affirmation fausse correspond à une erreur classique ; savoir dire **pourquoi** c'est faux vaut mieux que se souvenir que c'est faux.

Réponse. a) vrai — b) faux ($\frac{2}{5}$) — c) faux ($-\frac{4}{3}$) — d) vrai.

Correction de l'exercice 4 - Le partage du terrain

a) Le verger est le complément des deux autres. Dénominateur commun à 5 et 4 : 20.

$$1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{4}\right) = 1 - \left(\frac{8}{20} + \frac{5}{20}\right) = 1 - \frac{13}{20} = \frac{7}{20}$$

b) On multiplie chaque fraction par l'aire totale :

$$\text{— potager : } 1800 \times \frac{2}{5} = 720 \text{ m}^2 ;$$

$$\text{— pelouse : } 1800 \times \frac{1}{4} = 450 \text{ m}^2 ;$$

$$\text{— verger : } 1800 \times \frac{7}{20} = 630 \text{ m}^2.$$

Contrôle : $720 + 450 + 630 = 1800$ ✓

c) Pelouse et verger réunis représentent $\frac{5}{20} + \frac{7}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ du terrain, contre $\frac{2}{5}$ pour le potager. Comme $\frac{3}{5} > \frac{2}{5}$, le potager est **plus petit** (720 m^2 contre 1080 m^2).

Le réflexe. Vérifier que la somme des trois parts fait exactement le tout est un contrôle gratuit qui repère toute erreur de réduction.

Réponse. a) $\frac{7}{20}$ — b) 720, 450 et 630 m^2 — c) non, $720 < 1080$.

Correction de l'exercice 5 - Deux remises successives

a) Après la première remise, on paie $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ du prix :

$$120 \times \frac{3}{4} = 90 \text{ €}$$

Après la seconde, on paie $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ de 90 € : $90 \times \frac{4}{5} = 72 \text{ €}$.

b) On enchaîne les deux coefficients :

$$\frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

On paie donc $\frac{3}{5}$ du prix initial, et en effet $120 \times \frac{3}{5} = 72 \text{ €}$ ✓

c) **Non.** Une remise de $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20}$ laisserait à payer $\frac{11}{20}$ du prix, soit 66 € — moins que les 72 € réels. La remise globale est en fait $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} = \frac{8}{20}$.

Pourquoi. La seconde remise porte sur le prix **déjà réduit**, pas sur le prix initial : elle est donc calculée sur une base plus petite. Les remises successives se **multiplient**, elles ne s'additionnent pas.

Réponse. a) 90 € puis 72 € — b) $\frac{3}{5}$ — c) non : remise globale $\frac{2}{5}$, pas $\frac{9}{20}$.

Correction de l'exercice 6 - Les deux robinets

a) Remplir la citerne en 6 heures, c'est en remplir $\frac{1}{6}$ chaque heure ; de même $\frac{1}{4}$ pour le second.

b) On additionne les deux débits, exprimés dans la même unité (citerne par heure).
Dénominateur commun 12 :

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{2}{12} + \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$$

Ensemble, ils remplissent $\frac{5}{12}$ de la citerne par heure.

c) On cherche combien de fois $\frac{5}{12}$ tient dans 1 citerne : c'est une division.

$$1 \div \frac{5}{12} = \frac{12}{5} = 2,4 \text{ h}$$

Soit 2 h 24 min (car $0,4 \times 60 = 24$).

Le contrôle indispensable. À deux robinets, le remplissage doit être plus rapide qu'avec le meilleur seul : $2,4 \text{ h} < 4 \text{ h}$ ✓ L'erreur classique consiste à faire la moyenne des durées (5 h), ce qui donnerait un résultat plus lent que le robinet le plus rapide — absurde.

Réponse. a) $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{4}$ — b) $\frac{5}{12}$ — c) $\frac{12}{5} \text{ h} = 2 \text{ h } 24 \text{ min}$.

Correction de l'exercice 7 - Le trajet fractionné

a) Dénominateur commun à 5 et 3 : 15.

$$1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3} \right) = 1 - \left(\frac{6}{15} + \frac{5}{15} \right) = 1 - \frac{11}{15} = \frac{4}{15}$$

b) On multiplie chaque fraction par 45 km :

$$\text{— jour 1 : } 45 \times \frac{2}{5} = 18 \text{ km ;}$$

$$\text{— jour 2 : } 45 \times \frac{1}{3} = 15 \text{ km ;}$$

$$\text{— jour 3 : } 45 \times \frac{4}{15} = 12 \text{ km.}$$

Contrôle : $18 + 15 + 12 = 45$ ✓

c) La durée est la distance divisée par la vitesse :

$$12 \div \frac{9}{2} = 12 \times \frac{2}{9} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3} \text{ h}$$

soit 2 h 40 min (car $\frac{2}{3}$ d'heure vaut 40 min).

Le geste clé de la question c). Diviser par une fraction, c'est multiplier par son inverse — et comme $\frac{9}{2} = 4,5$ est supérieur à 1, la durée en heures doit être inférieure au nombre de kilomètres ✓

Réponse. a) $\frac{4}{15}$ — b) 18, 15 et 12 km — c) $\frac{8}{3} \text{ h} = 2 \text{ h } 40 \text{ min}$.

Correction de l'exercice 8 - L'épargne de Yasmine

a) Dénominateur commun à 8 et 6 : 24.

$$1 - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{6} \right) = 1 - \left(\frac{9}{24} + \frac{4}{24} \right) = 1 - \frac{13}{24} = \frac{11}{24}$$

b) Ces $\frac{11}{24}$ correspondent à 22 €. On remonte à la totalité par une division :

$$22 \div \frac{11}{24} = 22 \times \frac{24}{11} = \frac{528}{11} = 48 \text{ €}$$

Autre chemin : $\frac{1}{24}$ de la somme vaut $22 \div 11 = 2$ €, donc le tout vaut $2 \times 24 = 48$ €.

c) $48 \times \frac{3}{8} = 18$ €.

Contrôle complet. Livres 18 €, sorties $48 \times \frac{1}{6} = 8$ €, reste $48 - 18 - 8 = 22$ € ✓

La difficulté du problème. On connaît une partie et on cherche le tout : c'est une division par une fraction, l'opération inverse de « prendre une part ».

Réponse. a) $\frac{11}{24}$ — b) 48 € — c) 18 €.

Correction de l'exercice 9 - Le rectangle et ses dimensions

a) Le périmètre d'un rectangle vaut deux fois la somme de la longueur et de la largeur :

$$P = 2 \times (L + \ell) = 2 \times \left(\frac{7}{2} + \frac{4}{3} \right)$$

Réduction au dénominateur 6 : $\frac{21}{6} + \frac{8}{6} = \frac{29}{6}$, donc $P = 2 \times \frac{29}{6} = \frac{29}{3}$ cm, soit environ 9,67 cm.

b) L'aire est le produit des deux dimensions :

$$A = L \times \ell = \frac{7}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{28}{6} = \frac{14}{3} \text{ cm}^2$$

c) La largeur cherchée est l'aire divisée par la longueur :

$$\frac{14}{3} \div \frac{14}{3} = 1 \text{ cm}$$

Ce que le cas c) illustre. Quand les deux quantités sont égales, le quotient vaut 1 sans calcul. Contrôle de cohérence : la longueur a été multipliée par $\frac{4}{3}$ en passant de $\frac{7}{2}$ à $\frac{14}{3}$, donc la largeur doit être divisée par $\frac{4}{3}$: $\frac{4}{3} \div \frac{4}{3} = 1$ ✓

Réponse. a) $\frac{29}{3}$ cm — b) $\frac{14}{3}$ cm² — c) 1 cm.

Correction de l'exercice 10 - La classe et les langues

a) La part qui n'étudie pas l'espagnol vaut $1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$. L'allemand en représente les trois quarts :

$$\frac{3}{4} \times \frac{4}{9} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

b) L'italien correspond au quart restant de cette même part :

$$\frac{1}{4} \times \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$$

c) Dénominateur commun 9 :

$$\frac{5}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9} + \frac{3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

Chaque élève étudie exactement une de ces trois langues ✓

d) $540 \times \frac{1}{9} = 60$ élèves.

Le point délicat. Le $\frac{3}{4}$ porte sur les non-hispanisants, pas sur tout le collège : il faut le multiplier par $\frac{4}{9}$ et non l'additionner. La vérification de la question c) est précisément ce

qui permet de détecter une mauvaise lecture de l'énoncé.

Réponse. a) $\frac{1}{3}$ — b) $\frac{1}{9}$ — c) somme égale à 1 — d) 60 élèves.

Correction de l'exercice 11 - Retrouver le nombre

a) Si le tiers vaut $\frac{5}{6}$, le nombre vaut trois fois plus :

$$\frac{5}{6} \div \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \times 3 = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

Vérification : $\frac{1}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{6} \checkmark$

b) On divise par la fraction connue :

$$18 \div \frac{2}{7} = 18 \times \frac{7}{2} = 63$$

Vérification : $63 \times \frac{2}{7} = 18 \checkmark$

c) « Un nombre augmenté de son quart » représente $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ du nombre. Donc $\frac{5}{4}$ du nombre vaut 35, d'où

$$35 \div \frac{5}{4} = 35 \times \frac{4}{5} = 28$$

Vérification : $28 + \frac{28}{4} = 28 + 7 = 35 \checkmark$

Le geste commun aux trois questions. On connaît une fraction d'un nombre et on cherche le nombre : c'est toujours une **division** par cette fraction. Et la vérification, en une ligne, garantit le résultat.

Réponse. a) $\frac{5}{2}$ — b) 63 — c) 28.

Correction de l'exercice 12 - Comparer trois offres

Magasin A. La remise vaut $80 \times \frac{1}{5} = 16$ €, donc le prix est $80 - 16 = 64$ €.

Magasin B. $80 \times \frac{3}{16} = \frac{240}{16} = 15$ €, donc le prix est $80 - 15 = 65$ €.

Magasin C. $80 \times \frac{1}{4} = 20$ €, donc $80 - 20 = 60$ €, plus 6 € de livraison : 66 € au total.

Classement. $64 < 65 < 66$: le **magasin A** est le plus avantageux.

Le piège. En comparant seulement les remises, on aurait choisi C :

$$\frac{3}{16} < \frac{1}{5} = \frac{16}{80} < \frac{1}{4}$$

(en réduisant au dénominateur 80 : $\frac{15}{80} < \frac{16}{80} < \frac{20}{80}$). Mais les frais de livraison annulent l'avantage de C et le font passer dernier.

La leçon. Comparer des offres exige de calculer le **prix final**, pas seulement la part remise : la plus grosse remise n'est pas toujours la meilleure affaire.

Réponse. Magasin A : 64 € (contre 65 € en B et 66 € en C).

Correction de l'exercice 13 - Les jetons de la boîte

a) Le bleu est le complément des deux autres couleurs. Dénominateur commun 9 :

$$1 - \left(\frac{2}{9} + \frac{1}{3}\right) = 1 - \left(\frac{2}{9} + \frac{3}{9}\right) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

b) Ces $\frac{4}{9}$ correspondent à 36 jetons :

$$36 \div \frac{4}{9} = 36 \times \frac{9}{4} = 81$$

La boîte contient 81 jetons. (Autre chemin : $\frac{1}{9}$ du total vaut $36 \div 4 = 9$ jetons, donc le total vaut $9 \times 9 = 81$.)

c) Rouges : $81 \times \frac{2}{9} = 18$. Verts : $81 \times \frac{1}{3} = 27$. Bleus : 36.

Contrôle : $18 + 27 + 36 = 81$ ✓

Ce qui rend le problème intéressant. Le nombre total n'est pas donné : c'est une couleur dont on connaît l'effectif qui sert de point d'appui. Il faut d'abord trouver **quelle fraction** représentent ces 36 jetons, sinon aucun calcul n'est possible.

Réponse. a) $\frac{4}{9}$ — b) 81 jetons — c) 18 rouges, 27 verts, 36 bleus.

Correction de l'exercice 14 - La bouteille et les verres

a) On cherche combien de fois $\frac{1}{8}$ tient dans $\frac{3}{2}$:

$$\frac{3}{2} \div \frac{1}{8} = \frac{3}{2} \times 8 = \frac{24}{2} = 12$$

On remplit 12 verres.

b) Boire les $\frac{2}{3}$ laisse le tiers restant :

$$\frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \text{ L}$$

c) Avec $\frac{1}{2}$ litre :

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

On remplit encore 4 verres.

Le contrôle par la proportion. Le reste est le tiers du contenu initial, donc le nombre de verres doit être le tiers de 12, soit 4 ✓ Les deux raisonnements — par les volumes ou par les proportions — se confirment mutuellement.

Ce qu'il faut savoir reconnaître. « Combien de verres » est une division ; « les deux tiers de la bouteille » est un produit. C'est la formulation qui indique l'opération.

Réponse. a) 12 verres — b) $\frac{1}{2}$ L — c) 4 verres.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : le voyage scolaire

a) $9600 \times \frac{1}{4} = 2400$ €.

b) Le reste après la coopérative vaut $9600 - 2400 = 7200$ €, soit $\frac{3}{4}$ du total. La subvention en couvre les $\frac{2}{5}$:

$$7200 \times \frac{2}{5} = \frac{14400}{5} = 2880 \text{ €}$$

c) En fractions du total, la subvention représente

$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

Les familles paient donc

$$1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{10} = \frac{20}{20} - \frac{5}{20} - \frac{6}{20} = \frac{9}{20}$$

d) La part des familles vaut $9600 \times \frac{9}{20} = 4320$ €, soit $4320 \div 32 = 135$ € par famille.

Contrôle final : $2400 + 2880 + 4320 = 9600$ € ✓

Le piège central. Le $\frac{2}{5}$ porte sur **le reste**, pas sur le coût total : le confondre donnerait $\frac{2}{5}$ du total, soit 3840 €, et une part des familles fautive de près de mille euros.

Réponse. a) 2400 € — b) 2880 € — c) $\frac{9}{20}$ — d) 135 € par famille.