

Plaquette 1 - Vocabulaire et premiers calculs

Probabilités — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Vocabulaire.

Mot	Ce qu'il désigne
expérience aléatoire	une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat
issue	un résultat possible de l'expérience
univers	l'ensemble de toutes les issues
événement	un ensemble d'issues
événement élémentaire	un événement réduit à une seule issue

Probabilité en situation d'équiprobabilité. Quand toutes les issues ont la même chance :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre total d'issues}}$$

L'encadrement fondamental.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Un événement **impossible** a une probabilité de 0, un événement **certain** une probabilité de 1.

La somme des probabilités de toutes les issues vaut 1.

Écritures d'une probabilité. Fraction, décimal ou pourcentage désignent le même nombre :

$$\frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$$

On privilégie la **fraction irréductible**, qui est la valeur exacte.

Le contrôle systématique. Une probabilité hors de $[0; 1]$ est fausse ; une somme de probabilités différente de 1 signale un oubli d'issue.

Correction de l'exercice 1 - Décrire une expérience

a) Les issues sont les six faces possibles :

$$1; 2; 3; 4; 5; 6$$

Chacune est une **issue élémentaire** de l'expérience.

b) Il y a 6 **issues** : c'est le nombre total de résultats possibles, et ce sera le dénominateur de toutes les probabilités de cette expérience.

$$P(A) = \frac{\text{issues favorables}}{6}$$

c) Par exemple l'événement « obtenir un nombre pair », formé des issues 2, 4 et 6. On pourrait aussi citer « obtenir au plus 3 », formé de 1, 2 et 3.

Le mot « équilibré » est essentiel. Il garantit que les six faces ont la même chance de sortir : c'est l'hypothèse d'**équiprobabilité**, sans laquelle la formule ci-dessus ne

s'applique pas. Avec un dé truqué, il faudrait connaître la probabilité de chaque face séparément.

Réponse. a) 1 à 6 — b) 6 issues — c) par exemple « nombre pair » = {2; 4; 6}.

Correction de l'exercice 2 - Premières probabilités

La formule du cours, les six faces étant équiprobables :

$$P(A) = \frac{\text{issues favorables}}{6}$$

a) Une seule issue favorable : $P = \frac{1}{6}$.

b) Les issues favorables sont 2, 4 et 6 :

$$P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$$

c) Les issues favorables sont 3, 4, 5 et 6 :

$$P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \approx 0,67$$

d) Aucune face ne porte 7 : l'événement est **impossible**, donc $P = \frac{0}{6} = 0$.

Les deux contrôles. Toutes les probabilités trouvées sont entre 0 et 1 ✓ Et la simplification est attendue : $\frac{3}{6}$ doit être écrit $\frac{1}{2}$.

La lecture de b). Une probabilité de $\frac{1}{2}$ signifie « une chance sur deux » : sur un grand nombre de lancers, environ la moitié donneront un nombre pair.

Réponse. a) $\frac{1}{6}$ — b) $\frac{1}{2}$ — c) $\frac{2}{3}$ — d) 0.

Correction de l'exercice 3 - L'urne de billes

a) Il y a $5 + 3 + 4 = 12$ billes, donc 12 **issues** équiprobables — chaque bille a la même chance d'être tirée.

b) Trois billes sont bleues :

$$P(\text{bleue}) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0,25$$

c) Les billes non vertes sont les rouges et les bleues, soit $5 + 3 = 8$ billes :

$$P(\text{non verte}) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Le contrôle par la somme. Les trois couleurs se partagent la totalité :

$$\frac{5}{12} + \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{12}{12} = 1$$

L'égalité est vérifiée ✓

L'attention à porter aux issues. Ce sont les **billes** qui sont équiprobables, pas les couleurs : il y a trois couleurs mais douze issues. Écrire $P(\text{bleue}) = \frac{1}{3}$ serait l'erreur classique.

Réponse. a) 12 issues — b) $\frac{1}{4}$ — c) $\frac{2}{3}$.

Correction de l'exercice 4 - Le jeu de cartes

La formule, les 32 cartes étant équiprobables :

$$P(A) = \frac{\text{issues favorables}}{32}$$

a) Il y a 8 cœurs :

$$P(\text{cœur}) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

b) Il y a 4 rois, un par couleur :

$$P(\text{roi}) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

c) Une seule carte est le roi de cœur :

$$P(\text{roi de cœur}) = \frac{1}{32}$$

La hiérarchie des trois résultats. $\frac{1}{4} > \frac{1}{8} > \frac{1}{32}$: plus la condition est précise, moins il y a d'issues favorables, donc plus la probabilité est faible. C'est un contrôle de cohérence immédiat.

Le lien à remarquer. $\frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$: la probabilité d'être à la fois cœur et roi est le produit des deux. Ce n'est pas un hasard, et ce sera étudié plus tard sous le nom d'indépendance.

Réponse. a) $\frac{1}{4}$ — b) $\frac{1}{8}$ — c) $\frac{1}{32}$.

Correction de l'exercice 5 - Événement certain, impossible

a) Toutes les faces portent un nombre inférieur à 7 : l'événement est **certain**.

$$P = \frac{6}{6} = 1$$

b) Aucune face ne porte 0 : l'événement est **impossible**, $P = 0$.

c) Les multiples de 3 entre 1 et 6 sont 3 et 6 : l'événement n'est ni certain ni impossible.

$$P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

d) Toutes les faces portent un entier : l'événement est **certain**, $P = 1$.

Les deux bornes de l'échelle des probabilités.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

0 correspond à l'impossible, 1 au certain, et toutes les autres valeurs à des événements possibles sans être sûrs.

La nuance à ne pas confondre. Une probabilité de 0 signifie « ne se produit jamais » dans une expérience à issues finies. Une probabilité proche de 0, comme $\frac{1}{1000}$, décrit un événement rare mais possible.

Réponse. a) certain, $P = 1$ — b) impossible, $P = 0$ — c) $P = \frac{1}{3}$ — d) certain, $P = 1$.

Correction de l'exercice 6 - La roue de loterie

a) Les 10 secteurs étant identiques, ils sont équiprobables :

$$P(\text{rouge}) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \quad P(\text{jaune}) = \frac{3}{10}$$

$$P(\text{vert}) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \quad P(\text{noir}) = \frac{1}{10}$$

b) **Contrôle** :

$$\frac{4}{10} + \frac{3}{10} + \frac{2}{10} + \frac{1}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

Le contrôle est concluant ✓

c) Le **rouge**, avec $\frac{2}{5} = 40\%$ de chances — la probabilité la plus élevée.

Le mot « identiques » est décisif. Il garantit que les secteurs ont la même ouverture angulaire, donc la même chance. Si les secteurs avaient des tailles différentes, il faudrait raisonner sur les angles et non sur le nombre de secteurs.

La lecture en pourcentage. 40%, 30%, 20% et 10% : les probabilités s'expriment aussi en pourcentage, et leur somme fait bien 100%.

Réponse. a) $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{10}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{10}$ — b) somme = 1 ✓ — c) le rouge.

Correction de l'exercice 7 - L'erreur de Mehdi

a) Mehdi confond le nombre de **couleurs** et le nombre d'**issues**. Les issues équiprobables sont les 10 billes, pas les 2 couleurs : chaque bille a la même chance d'être tirée, mais il y a quatre fois plus de noires que de rouges.

b) **Le calcul correct** :

$$P(\text{rouge}) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0,2$$

$$\text{et } P(\text{noire}) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

Contrôle : $0,2 + 0,8 = 1$ ✓

c) Il faudrait **autant** de billes de chaque couleur, par exemple 5 rouges et 5 noires — ou 2 rouges et 2 noires.

Le réflexe à installer. L'équiprobabilité porte sur les objets tirés, jamais sur les catégories. Avant tout calcul, se demander : « qu'est-ce qui a la même chance ici ? »

Réponse. a) il confond couleurs et issues — b) $P = \frac{1}{5}$ — c) autant de billes de chaque couleur.

Correction de l'exercice 8 - Les jetons numérotés

La formule, les 15 jetons étant équiprobables :

$$P(A) = \frac{\text{issues favorables}}{15}$$

a) Les pairs entre 1 et 15 sont 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 : sept jetons.

$$P(\text{pair}) = \frac{7}{15}$$

b) Les multiples de 5 sont 5, 10 et 15 :

$$P = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

c) Les nombres premiers entre 1 et 15 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13 : six jetons. (1 n'est pas premier, et $9 = 3 \times 3$ ne l'est pas non plus.)

$$P(\text{premier}) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

Le piège de c). Oublier que 1 n'est pas premier, ou compter 9 comme premier, sont les deux erreurs usuelles. Un nombre premier a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Le contrôle de a). Sur 15 jetons, il y a 7 pairs et 8 impairs : la probabilité d'un pair est donc un peu inférieure à $\frac{1}{2}$ ✓

Réponse. a) $\frac{7}{15}$ — b) $\frac{1}{5}$ — c) $\frac{2}{5}$.

Correction de l'exercice 9 - Des probabilités aux effectifs

a) La probabilité est le quotient du nombre de billes vertes par le total :

$$\frac{n}{40} = \frac{3}{8} \Rightarrow 8n = 120 \Rightarrow n = 15$$

Il y a 15 **billes vertes**.

b) $40 - 15 = 25$ billes non vertes. Leur probabilité vaut $\frac{25}{40} = \frac{5}{8}$, et $\frac{3}{8} + \frac{5}{8} = 1$ ✓

c) L'urne contient alors 23 vertes sur 48 billes :

$$P = \frac{23}{48} \approx 0,479$$

Le contrôle de sens. Ajouter des billes vertes doit **augmenter** la probabilité : $\frac{3}{8} = 0,375$ devient 0,479 ✓

L'erreur à éviter en c). Ajouter 8 au seul numérateur donnerait $\frac{23}{40}$: faux, car le total change aussi. Les deux termes du quotient doivent être mis à jour.

Réponse. a) 15 billes — b) 25 billes — c) $\frac{23}{48} \approx 0,48$.

Correction de l'exercice 10 - Fréquence et probabilité

a) La fréquence observée vaut

$$f = \frac{486}{1000} = 0,486 = 48,6\%$$

b) **Non.** La probabilité théorique d'obtenir pile avec une pièce équilibrée est

$$P = \frac{1}{2} = 0,5$$

La fréquence observée, 0,486, en est **proche** mais ne lui est pas égale. C'est normal : le hasard ne produit pas exactement la proportion théorique.

c) Avec beaucoup plus de lancers, la fréquence observée se rapprocherait encore de 0,5. C'est la **loi des grands nombres** : plus l'expérience est répétée, plus la fréquence tend vers la probabilité.

Ce qu'il faut distinguer. La **probabilité** est un nombre théorique, calculé a priori. La **fréquence** est un résultat d'expérience, observé a posteriori. Elles se rapprochent quand le nombre d'essais grandit, sans jamais coïncider exactement.

L'usage pratique. Quand la probabilité est inconnue — la fiabilité d'une machine, par exemple — on l'estime par la fréquence observée sur un grand nombre d'essais.

Réponse. a) 0,486 — b) non, la probabilité vaut 0,5 — c) la fréquence s'en rapprocherait davantage.

Correction de l'exercice 11 - Les élèves de la classe

La formule, chaque élève ayant la même chance d'être interrogé :

$$P(A) = \frac{\text{issues favorables}}{28}$$

a) $P(\text{fille}) = \frac{16}{28} = \frac{4}{7} \approx 0,571$.

b) Les demi-pensionnaires sont $7 + 5 = 12$ élèves :

$$P(\text{DP}) = \frac{12}{28} = \frac{3}{7} \approx 0,429$$

c) Les filles demi-pensionnaires sont 7 :

$$P(\text{fille et DP}) = \frac{7}{28} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Le contrôle de cohérence. La probabilité de c) doit être inférieure à celles de a) et b), puisque l'événement est plus restrictif : $0,25 < 0,429 < 0,571$ ✓

L'erreur à éviter. Multiplier $\frac{4}{7}$ par $\frac{3}{7}$ donnerait $\frac{12}{49} \approx 0,245$: proche, mais faux. Ici on compte directement les élèves concernés — le produit ne serait justifié que si les deux caractères étaient indépendants, ce qui n'est pas exactement le cas.

Réponse. a) $\frac{4}{7}$ — b) $\frac{3}{7}$ — c) $\frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 12 - La roue truquée

a) La somme des probabilités de toutes les issues vaut 1 :

$$P(\text{jaune}) = 1 - (0,45 + 0,2 + 0,15) = 1 - 0,8 = 0,2$$

b) Le **rouge**, avec 0,45, soit près d'une fois sur deux.

c) Sur 200 tours, on attend environ

$$200 \times 0,15 = 30 \text{ sorties du vert}$$

Le mot « environ » est indispensable. La probabilité ne garantit pas un résultat : sur 200 tours réels, on observerait peut-être 27 ou 34 sorties. Elle prédit un ordre de grandeur, pas un décompte exact.

La différence avec une roue équilibrée. Ici les secteurs n'ont pas la même taille : on ne peut pas compter les issues, il faut connaître les probabilités. La formule des issues favorables ne s'applique **qu'en situation d'équiprobabilité**.

Réponse. a) 0,2 — b) le rouge — c) environ 30 sorties.

Correction de l'exercice 13 - Deux dés, une somme

La formule, avec six issues équiprobables :

$$P(A) = \frac{\text{issues favorables}}{6}$$

a) Strictement supérieur à 4 : les issues 5 et 6.

$$P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

b) Entre 2 et 5 **inclus** : les issues 2, 3, 4 et 5.

$$P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

c) Ni 1 ni 6 : il reste 2, 3, 4 et 5, donc $P = \frac{2}{3}$ également.

Les deux formulations de b) et c) décrivent le même événement, ce que le calcul confirme. Savoir reconnaître qu'un même ensemble d'issues se décrit de plusieurs façons

évite de recompter.

Le piège du vocabulaire. « Strictement supérieur à 4 » exclut 4 ; « supérieur ou égal à 4 » l'inclut et donnerait $\frac{1}{2}$. « Entre 2 et 5 inclus » inclut les deux bornes. Lire précisément l'énoncé fait partie du calcul.

Réponse. a) $\frac{1}{3}$ — b) $\frac{2}{3}$ — c) $\frac{2}{3}$.

Correction de l'exercice 14 - Comparer deux urnes

a) **Urne A** : $P_A = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0,25$.

Urne B : $P_B = \frac{5}{18} \approx 0,278$.

b) **L'urne B**, dont la probabilité est légèrement supérieure.

Par les produits en croix, pour comparer sans décimales :

$$3 \times 18 = 54 \quad 12 \times 5 = 60$$

Comme $54 < 60$, on a bien $\frac{3}{12} < \frac{5}{18} \checkmark$

c) Pour égaler $\frac{1}{4}$, il faudrait n gagnantes sur 18 avec

$$\frac{n}{18} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4n = 18 \Rightarrow n = 4,5$$

Impossible avec un nombre entier de boules : avec 4 gagnantes, $P_B = \frac{2}{9} \approx 0,222$ serait inférieure ; avec 5, elle est supérieure.

La leçon. Comparer 3 et 5 n'aurait aucun sens : les urnes n'ont pas le même nombre de boules. Ce sont les **probabilités** qui se comparent, exactement comme les fréquences en statistiques.

Réponse. a) 0,25 et environ 0,278 — b) l'urne B — c) il faudrait 4,5 boules, impossible.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : le distributeur

a) $50 - (18 + 14 + 12) = 50 - 44 = 6$ friandises à la menthe.

b) Chaque friandise ayant la même chance :

$$P(\text{chocolat}) = \frac{18}{50} = \frac{9}{25} = 0,36$$

$$P(\text{fraise}) = \frac{14}{50} = \frac{7}{25} = 0,28 \quad P(\text{citron}) = \frac{12}{50} = \frac{6}{25} = 0,24$$

$$P(\text{menthe}) = \frac{6}{50} = \frac{3}{25} = 0,12$$

c) **Contrôle** : $0,36 + 0,28 + 0,24 + 0,12 = 1 \checkmark$

d) Ni chocolat ni menthe, ce sont les fraises et les citrons, soit $14 + 12 = 26$ friandises :

$$P = \frac{26}{50} = \frac{13}{25} = 0,52$$

Le chemin le plus rapide pour d). $1 - 0,36 - 0,12 = 0,52 \checkmark$ Passer par le complément évite de recompter, et c'est le principe de l'événement contraire, étudié dans la plaquette 3.

Réponse. a) 6 — b) 0,36 ; 0,28 ; 0,24 ; 0,12 — c) somme = 1 $\checkmark$ — d) 0,52.