

Plaquette 2 – Situations d'équiprobabilité

Probabilités — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

La formule, valable uniquement si toutes les issues ont la même chance.

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre total d'issues}}$$

Quand l'équiprobabilité est-elle vérifiée ?

Situation	Issues équiprobables
dé équilibré	les six faces
pièce non truquée	pile et face
tirage dans une urne	les boules, pas les couleurs
roue à secteurs identiques	les secteurs

Réunion de deux événements. Si A et B n'ont aucune issue commune :

$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$$

Si des issues sont communes, il faut les compter **une seule fois**.

Probabilité et effectif. On retrouve un effectif à partir d'une probabilité :

$$\text{effectif favorable} = P(A) \times \text{effectif total}$$

Estimer un nombre de succès sur n répétitions : environ $n \times P(A)$, avec le mot « environ ».

Le contrôle à faire à chaque fois. La somme des probabilités de tous les cas possibles doit valoir 1, et chaque probabilité doit être comprise entre 0 et 1.

Correction de l'exercice 1 – Compter les issues favorables

La formule, les 24 jetons étant équiprobables :

$$P(A) = \frac{\text{issues favorables}}{24}$$

a) Les multiples de 4 jusqu'à 24 sont 4, 8, 12, 16, 20, 24 : six jetons.

$$P = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

b) Les nombres à deux chiffres vont de 10 à 24, soit $24 - 10 + 1 = 15$ jetons.

$$P = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$$

c) Les diviseurs de 24 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 : huit jetons.

$$P = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

Le piège du comptage en b). De 10 à 24, il y a 15 nombres et non 14 : il faut ajouter 1 après la soustraction, car les deux bornes sont incluses. C'est l'erreur de comptage la plus répandue.

Le contrôle de c). Les diviseurs vont par paires de produit 24 : (1; 24), (2; 12), (3; 8),

(4; 6) — quatre paires, donc huit diviseurs ✓

Réponse. a) $\frac{1}{4}$ — b) $\frac{5}{8}$ — c) $\frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 2 - L'urne à trois couleurs

Effectif total : $7 + 5 + 8 = 20$ boules.

a) $P(\text{blanche}) = \frac{7}{20} = 0,35$.

b) Les deux événements n'ont aucune issue commune : une boule ne peut pas être à la fois blanche et noire. On peut donc additionner :

$$P(\text{blanche ou noire}) = \frac{7}{20} + \frac{5}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0,6$$

On retrouve le même résultat en comptant directement les 12 boules concernées ✓

c) $P(\text{rouge}) = \frac{8}{20} = 0,4$, et

$$0,35 + 0,25 + 0,4 = 1$$

Le total attendu est bien retrouvé ✓

La condition pour additionner. Les deux événements doivent être **incompatibles**, c'est-à-dire ne partager aucune issue. C'est le cas ici, mais pas toujours : on ne peut pas additionner « être un roi » et « être un cœur » dans un jeu de cartes, le roi de cœur serait compté deux fois.

Réponse. a) 0,35 — b) 0,6 — c) somme = 1 ✓

Correction de l'exercice 3 - Quand les événements se recoupent

a) 4 rois sur 32 cartes : $P = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

b) 8 cœurs sur 32 : $P = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

c) **Attention, les deux événements se recoupent** : le roi de cœur appartient aux deux. Additionner $\frac{4}{32}$ et $\frac{8}{32}$ le compterait deux fois.

On dénombre directement : les cartes favorables sont les 8 cœurs, plus les 3 autres rois (de pique, carreau et trèfle), soit 11 cartes.

$$P(\text{roi ou cœur}) = \frac{11}{32}$$

La vérification par la soustraction du doublon :

$$\frac{4}{32} + \frac{8}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$$

Les deux chemins concordent ✓

La règle à retenir. On n'additionne les probabilités que si les événements sont **incompatibles**. Sinon, il faut retrancher les issues comptées deux fois — ou dénombrer directement, ce qui est plus sûr en Quatrième.

Réponse. a) $\frac{1}{8}$ — b) $\frac{1}{4}$ — c) $\frac{11}{32}$ et non $\frac{12}{32}$.

Correction de l'exercice 4 - Les élèves du club

a) $P(\text{judo}) = \frac{20}{45} = \frac{4}{9} \approx 0,444$.

b) Les non-grimpeurs sont $45 - 10 = 35$ membres :

$$P = \frac{35}{45} = \frac{7}{9} \approx 0,778$$

c) Le club compte alors 35 judokas sur 60 membres :

$$P = \frac{35}{60} = \frac{7}{12} \approx 0,583$$

Le contrôle de sens. Ajouter des judokas augmente la probabilité du judo : 0,444 devient 0,583 ✓

L'erreur à éviter en c). Écrire $\frac{35}{45}$ oublierait que l'effectif total change aussi. Numérateur **et** dénominateur augmentent de 15.

Le contrôle de b) autrement. $P(\text{escalade}) = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$, et $\frac{2}{9} + \frac{7}{9} = 1$ ✓ C'est le principe de l'événement contraire.

Réponse. a) $\frac{4}{9}$ — b) $\frac{7}{9}$ — c) $\frac{7}{12}$.

Correction de l'exercice 5 - Retrouver un effectif

La relation utilisée.

$$\text{effectif favorable} = P(A) \times \text{effectif total}$$

a) $0,35 \times 60 = 21$ bonbons à la menthe.

b) $\frac{1}{4} \times 60 = 15$ bonbons au citron.

c) Les autres sont $60 - 21 - 15 = 24$ bonbons.

Contrôle par les probabilités :

$$1 - 0,35 - 0,25 = 0,4 \quad 0,4 \times 60 = 24$$

L'égalité est vérifiée ✓

La conversion utile. $\frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$: passer d'une écriture à l'autre permet d'additionner des probabilités données sous des formes différentes, comme ici.

La vérification d'effectif entier. 21, 15 et 24 sont entiers, ce qui est cohérent avec des bonbons. Une probabilité de 0,37 aurait donné 22,2 bonbons : signe que l'énoncé serait incohérent.

Réponse. a) 21 — b) 15 — c) 24 bonbons.

Correction de l'exercice 6 - L'erreur de Sonia

a) Il y a 3 figures par couleur — valet, dame, roi — et 4 couleurs, soit 12 figures ✓ Ce nombre est juste.

b) **L'erreur est l'addition.** Trois cartes sont à la fois des figures **et** des cœurs : le valet, la dame et le roi de cœur. En additionnant, Sonia les compte deux fois.

c) **Le dénombrement direct.** Les cartes favorables sont les 8 cœurs, plus les 9 figures des trois autres couleurs, soit 17 cartes.

$$P = \frac{17}{32}$$

Vérification par la soustraction :

$$\frac{12}{32} + \frac{8}{32} - \frac{3}{32} = \frac{17}{32}$$

Le contrôle est concluant ✓

Le test qui alerte. $\frac{20}{32} = 0,625$ contre $\frac{17}{32} \approx 0,531$: l'écart n'est pas énorme, donc l'erreur ne saute pas aux yeux. C'est pourquoi il faut systématiquement se demander si les deux événements peuvent se produire **en même temps**.

Réponse. a) 12 figures ✓ — b) les 3 figures de cœur sont comptées deux fois — c)
 $P = \frac{17}{32}$.

Correction de l'exercice 7 - Le dé à douze faces

La formule, avec 12 issues équiprobables :

$$P(A) = \frac{\text{issues favorables}}{12}$$

a) Multiples de 3 : 3, 6, 9, 12 — quatre issues.

$$P = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

b) Nombres pairs : 2, 4, 6, 8, 10, 12 — six issues.

$$P = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

c) À la fois multiple de 3 et pair, c'est-à-dire multiple de 6 : 6 et 12 — deux issues.

$$P = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

La remarque à faire. $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$: le produit des deux probabilités donne exactement celle de l'intersection. Cela tient au fait que, de 1 à 12, être multiple de 3 et être pair sont des propriétés qui « ne s'influencent pas ».

L'avertissement. Cette coïncidence n'est pas une règle générale. Sur un dé à 10 faces, les multiples de 3 sont 3, 6, 9 et les pairs 2, 4, 6, 8, 10 : l'intersection ne contient que 6, et $\frac{3}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{15}{100} \neq \frac{1}{10}$.

Réponse. a) $\frac{1}{3}$ — b) $\frac{1}{2}$ — c) $\frac{1}{6}$.

Correction de l'exercice 8 - Prévoir un nombre de succès

a) $P(\text{gain}) = \frac{3}{8} = 0,375$.

b) On attend environ

$$240 \times \frac{3}{8} = 90 \text{ gains}$$

c) **Non, ce n'est pas surprenant.** 85 est proche de 90 : l'écart de 5 gains représente environ 5,6% de la prévision, ce qui entre dans les fluctuations normales du hasard.

Ce que la probabilité prédit — et ne prédit pas. Elle donne une **valeur attendue**, autour de laquelle les résultats réels fluctuent. Obtenir exactement 90 gains serait même plutôt rare.

Quand faudrait-il s'étonner ? Un résultat de 30 ou de 150 gains sur 240 tours s'écarterait trop de la prévision : on soupçonnerait alors que la roue n'est pas équilibrée, ou que les secteurs ne sont pas ceux annoncés.

Le lien avec la loi des grands nombres. La fréquence observée, $\frac{85}{240} \approx 0,354$, est proche de 0,375 ✓ et s'en rapprocherait davantage avec plus de tours.

Réponse. a) $\frac{3}{8} = 0,375$ — b) environ 90 gains — c) non, 85 est dans les fluctuations normales.

Correction de l'exercice 9 - Les tickets de tombola

a) Un seul ticket sur 500 donne le gros lot :

$$P = \frac{1}{500} = 0,002 = 0,2\%$$

b) Les tickets gagnants sont $1 + 9 + 40 = 50$:

$$P = \frac{50}{500} = \frac{1}{10} = 0,1 = 10\%$$

c) Avec 10 tickets, 10 chances sur 500 :

$$P = \frac{10}{500} = \frac{1}{50} = 0,02 = 2\%$$

Le contrôle de proportionnalité. Acheter dix fois plus de tickets multiplie par dix la probabilité de gagner le gros lot : 0,2% devient 2% ✓ Cette proportionnalité vaut tant que le nombre de tickets achetés reste petit devant le total.

La lecture des ordres de grandeur. Une chance sur dix de gagner un lot est appréciable ; une chance sur cinq cents pour le gros lot est très faible. Exprimer en pourcentage rend ces écarts immédiatement lisibles.

Réponse. a) 0,002 — b) 0,1 — c) 0,02.

Correction de l'exercice 10 - Le sac de lettres

a) Le mot MATHEMATIQUES compte 13 lettres : M, A, T, H, E, M, A, T, I, Q, U, E, S. Il y a donc 13 **jetons**.

b) La lettre M apparaît **deux** fois :

$$P(M) = \frac{2}{13}$$

c) Les voyelles sont A, E, A, I, U, E : six jetons. (A apparaît deux fois, E deux fois, plus I et U.)

$$P(\text{voyelle}) = \frac{6}{13}$$

Le contrôle. Les consonnes sont M, T, H, M, T, Q, S : sept jetons, et $6 + 7 = 13$ ✓ La probabilité d'une consonne vaut $\frac{7}{13}$, et $\frac{6}{13} + \frac{7}{13} = 1$ ✓

L'erreur à éviter. Compter les lettres **distinctes** donnerait 9 jetons (M, A, T, H, E, I, Q, U, S), et une probabilité de $\frac{1}{9}$ pour le M. Faux : ce sont les jetons qui sont équiprobables, et il y en a deux portant un M.

Réponse. a) 13 jetons — b) $\frac{2}{13}$ — c) $\frac{6}{13}$.

Correction de l'exercice 11 - Modifier une urne

a) Il y a 15 boules en tout :

$$P(\text{verte}) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0,4$$

b) En ajoutant n boules vertes, il y en a $6 + n$ sur un total de $15 + n$:

$$\frac{6+n}{15+n} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2(6+n) = 15+n \Rightarrow 12+2n = 15+n \Rightarrow n = 3$$

Vérification : $\frac{9}{18} = \frac{1}{2} \checkmark$

c) En retirant n boules jaunes, il reste $9 - n$ jaunes et 6 vertes sur $15 - n$:

$$\frac{6}{15-n} = \frac{1}{2} \Rightarrow 15-n = 12 \Rightarrow n = 3$$

Vérification : $\frac{6}{12} = \frac{1}{2} \checkmark$

La coïncidence et son explication. Dans les deux cas $n = 3$, parce qu'il y a 3 jaunes de plus que de vertes : ajouter trois vertes ou retirer trois jaunes égalise les deux couleurs. Une probabilité de $\frac{1}{2}$ signifie exactement qu'il y a autant de boules de chaque sorte.

Réponse. a) 0,4 — b) 3 boules vertes — c) 3 boules jaunes.

Correction de l'exercice 12 - Deux dés à comparer

a) **Dé A** : une face porte 3, donc $P = \frac{1}{6}$.

Dé B : deux faces portent 3, donc $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

b) **Dé A** : les faces 2, 4, 6 sont paires, donc $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Dé B : seules les deux faces portant 2 sont paires, donc $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

c) **Dé A** : les nombres premiers sont 2, 3, 5 — trois faces, $P = \frac{1}{2}$.

Dé B : toutes les faces portent 2, 3 ou 5, tous premiers — six faces, $P = 1$.

Avec le dé B, obtenir un nombre premier est un événement **certain**.

Ce que l'exercice installe. Ce sont les **faces** qui sont équiprobables, pas les valeurs affichées. Sur le dé B, il y a six issues mais seulement trois valeurs distinctes : compter les valeurs donnerait des probabilités fausses.

Réponse. a) $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{3}$ — b) $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ — c) le dé B, avec $P = 1$.

Correction de l'exercice 13 - Le parking

a) $120 - 78 - 30 = 12$ camionnettes.

b) $P(\text{moto}) = \frac{30}{120} = \frac{1}{4} = 0,25$.

c) Les véhicules à quatre roues sont les voitures et les camionnettes, soit $78 + 12 = 90$:

$$P = \frac{90}{120} = \frac{3}{4} = 0,75$$

Le contrôle par le complément. Les véhicules à quatre roues sont exactement ceux qui ne sont pas des motos :

$$1 - 0,25 = 0,75$$

Le total attendu est bien retrouvé $\checkmark$

Ce que ce contrôle annonce. Deux événements qui se partagent exactement toutes les issues ont des probabilités de somme 1. C'est la notion d'**événement contraire**, systématisée dans la plaquette suivante — et c'est souvent le chemin le plus court.

Réponse. a) 12 — b) 0,25 — c) 0,75.

Correction de l'exercice 14 – Comparer trois jeux

Jeu A. 4 rois sur 32 cartes :

$$P_A = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} = 0,125$$

Jeu B. 1 face sur 6 :

$$P_B = \frac{1}{6} \approx 0,167$$

Jeu C. 3 boules rouges sur 25 :

$$P_C = \frac{3}{25} = 0,12$$

Le classement, du plus favorable au moins favorable :

$$P_B > P_A > P_C$$

soit le jeu B, puis le jeu A, puis le jeu C.

La méthode de comparaison. Les trois fractions ont des dénominateurs différents : les convertir en décimaux est ici le chemin le plus rapide. On pourrait aussi les réduire au dénominateur commun 600 : $\frac{75}{600}$, $\frac{100}{600}$ et $\frac{72}{600}$ ✓

La remarque. Les trois jeux sont très proches, entre 12% et 17% de chances : seul le calcul permet de les départager, l'intuition n'y suffit pas.

Réponse. Jeu B ($\approx 0,167$) > jeu A (0,125) > jeu C (0,12).

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : la classe et le tirage au sort

a) Il y a $30 - 17 = 13$ garçons :

$$P(\text{garçon}) = \frac{13}{30} \approx 0,433$$

b) Les élèves ayant une responsabilité sont $6 + 4 = 10$:

$$P = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} \approx 0,333$$

c) Les filles sans responsabilité sont $17 - 6 = 11$:

$$P = \frac{11}{30} \approx 0,367$$

d) **Le tableau complet des quatre catégories :**

Catégorie	Effectif
filles avec responsabilité	6
filles sans responsabilité	11
garçons avec responsabilité	4
garçons sans responsabilité	9

Contrôle : $6 + 11 + 4 + 9 = 30$ ✓ et la somme des quatre probabilités vaut $\frac{30}{30} = 1$ ✓

Le bilan de la plaquette. Quand deux caractères se croisent, construire le tableau des quatre catégories rend tous les dénombrements immédiats et garantit qu'aucun élève n'est compté deux fois.

Réponse. a) $\frac{13}{30}$ — b) $\frac{1}{3}$ — c) $\frac{11}{30}$ — d) total 30 ✓