Plaquette 3 – L’événement contraire

Probabilités — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. L’événement contraire de A, noté $\overline{A}$, est constitué de **toutes les issues qui ne sont pas dans** A.

La formule fondamentale.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \qquad \text{donc} \qquad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Formuler le contraire.

Événement A	**Son contraire** $\overline{A}$
obtenir un 6	ne pas obtenir de 6
obtenir au moins un pile	n’obtenir aucun pile
obtenir au plus 3	obtenir strictement plus de 3
tous les jetons sont rouges	au moins un jeton n’est pas rouge

Les pièges de formulation.

— le contraire de « au moins un » est « aucun », pas « au plus un » ;

— le contraire de « tous » est « au moins un qui n’est pas », pas « aucun » ;

— le contraire de « strictement supérieur à 5 » est « inférieur ou égal à 5 ».

Quand l’utiliser. Dès que l’énoncé contient « au moins », « au plus », ou « pas » : le contraire est presque toujours plus simple à dénombrer.

Le contrôle. $P(A)$ et $P(\overline{A})$ doivent totaliser exactement 1. Deux probabilités dont la somme vaut 0,98 signalent un oubli d’issue.

Correction de l’exercice 1 – Formuler le contraire

a) Le contraire est « obtenir un nombre **impair** ». Sur un dé, les issues se répartissent entre pairs et impairs sans chevauchement :

$$P(\text{pair}) + P(\text{impair}) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} = 1$$

Les deux chemins concordent ✓

b) Le contraire de « au moins une rouge » est « **aucune** rouge ». Ce n’est **pas** « au plus une rouge » : cette formulation inclurait le cas d’une seule boule rouge, qui appartient déjà à l’événement de départ.

c) Le contraire de « les trois sont des filles » est « **au moins un** n’est pas une fille », c’est-à-dire « il y a au moins un garçon ». Ce n’est pas « les trois sont des garçons », qui est un cas beaucoup plus restrictif.

d) Le contraire de « au plus 4 » est « **strictement plus de** 4 », soit obtenir 5 ou 6.

La règle de formulation. Le contraire doit couvrir **exactement** tout ce qui reste, sans rien oublier ni rien reprendre. Le test : les deux événements réunis doivent former la totalité des issues, et ne se chevaucher en rien.

Réponse. a) impair — b) aucune rouge — c) au moins un garçon — d) obtenir 5 ou 6.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Calculer par le contraire

a) Il y a 20 boules en tout :

$$P(\text{blanche}) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

b) **Par l'événement contraire :**

$$P(\overline{\text{blanche}}) = 1 - P(\text{blanche}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$$

c) **Calcul direct :** 16 boules ne sont pas blanches, donc

$$P = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

L'égalité est vérifiée ✓

Les deux méthodes concordent.

Quand préférer le contraire. Ici les deux chemins sont aussi courts. L'intérêt apparaît quand l'événement direct compte beaucoup d'issues et son contraire très peu : on dénombre alors le plus petit des deux.

Le contrôle systématique. $0{,}2 + 0{,}8 = 1$ ✓ Cette égalité doit être vérifiée à chaque fois qu'on utilise la formule.

Réponse. a) 0,2 — b) 0,8 — c) $\frac{16}{20} = 0{,}8$ ✓

Correction de l'exercice 3 – Au moins un six

a) Chaque dé a 6 résultats possibles, et ils se combinent :

$$6 \times 6 = 36 \text{ issues}$$

b) Pour n'avoir aucun 6, chaque dé doit tomber sur l'une des cinq autres faces :

$$5 \times 5 = 25 \text{ issues}$$

c) **Par l'événement contraire :**

$$P(\text{au moins un 6}) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} \approx 0{,}306$$

Pourquoi le contraire est indispensable ici. Dénombrer directement « au moins un 6 » obligerait à distinguer trois cas — le 6 sur le premier dé seulement, sur le second seulement, ou sur les deux — soit $5 + 5 + 1 = 11$ issues. C'est faisable, mais plus long et plus risqué.

L'erreur classique. Répondre $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ compterait deux fois le double six. La bonne valeur, $\frac{11}{36} \approx 0{,}306$, est légèrement inférieure à $\frac{1}{3} \approx 0{,}333$ ✓

Réponse. a) 36 — b) 25 — c) $\frac{11}{36} \approx 0{,}31$.

Correction de l'exercice 4 – Le questionnaire

a) $P(\text{sportif}) = \frac{22}{30} = \frac{11}{15} \approx 0{,}733$.

b) **Par le contraire :**

$$P(\overline{\text{sportif}}) = 1 - \frac{11}{15} = \frac{4}{15} \approx 0{,}267$$

Contrôle direct : $30 - 22 = 8$ élèves non sportifs, et $\frac{8}{30} = \frac{4}{15}$ ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) La classe compterait 35 élèves dont 27 sportifs :

$$P(\text{sportif}) = \frac{27}{35} \approx 0{,}771 \qquad P(\overline{\text{sportif}}) = \frac{8}{35} \approx 0{,}229$$

Contrôle : $\frac{27}{35} + \frac{8}{35} = 1$ ✓

La lecture du changement. Le nombre de non-sportifs ne change pas (8), mais leur **probabilité** diminue, parce que le total augmente. Une probabilité dépend toujours des deux termes du quotient.

Réponse. a) $\frac{11}{15}$ — b) $\frac{4}{15}$ — c) $\frac{27}{35}$ et $\frac{8}{35}$.

Correction de l’exercice 5 – L’erreur de Hugo

a) Le contraire de « au moins un pile » est « **aucun pile** », c’est-à-dire « trois faces ». La formulation de Hugo est fausse : « au plus un pile » inclut le cas d’un seul pile, qui appartient déjà à l’événement de départ.

b) Chaque pièce a deux résultats, et elles se combinent :

$$2 \times 2 \times 2 = 8 \text{ issues}$$

c) Une seule issue ne comporte aucun pile : FFF. Donc

$$P(\text{au moins un pile}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0{,}875$$

Le contrôle par énumération. Les huit issues sont PPP, PPF, PFP, FPP, PFF, FPF, FFP, FFF. Sept comportent au moins un pile ✓

Le test qui démasque une mauvaise formulation. Un événement et son contraire ne doivent avoir **aucune issue commune**. « Au moins un pile » et « au plus un pile » partagent toutes les issues à exactement un pile : ce ne sont donc pas des contraires.

Réponse. a) le contraire est « aucun pile » — b) 8 issues — c) $\frac{7}{8}$.

Correction de l’exercice 6 – Le lot défectueux

a) $P(\text{défectueuse}) = \frac{12}{400} = 0{,}03 = 3\%$.

b) **Par le contraire :**

$$P(\text{conforme}) = 1 - 0{,}03 = 0{,}97 = 97\%$$

c) **Non.** Le taux de conformité est de 97%, inférieur aux 98% visés.

Ce qu’il faudrait pour atteindre l’objectif. Un taux de 98% signifie au plus 2% de défauts, soit

$$0{,}02 \times 400 = 8 \text{ pièces défectueuses}$$

Il y en a 12 : il faudrait en éliminer 4 de plus, soit un tiers des défauts actuels.

Le contrôle de cohérence. $\frac{8}{400} = 0{,}02$ ✓ et $\frac{388}{400} = 0{,}97\ldots$ non, $\frac{392}{400} = 0{,}98$ ✓ — avec 8 défauts, il resterait 392 pièces conformes.

Pourquoi passer par le contraire. Compter 388 pièces conformes une à une n’a aucun intérêt quand 12 défauts se comptent en une ligne. C’est exactement la situation où la formule fait gagner du temps.

Réponse. a) 0,03 — b) 0,97 — c) non, il faudrait au plus 8 défauts.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 7 – Deux tirages successifs

a) Chaque tirage a 5 issues, et la remise rend les deux tirages identiques :

$$5 \times 5 = 25 \text{ issues}$$

b) Pour deux rouges, il faut une rouge à chaque tirage :

$$3 \times 3 = 9 \text{ issues favorables} \qquad P = \frac{9}{25} = 0{,}36$$

c) « Au moins une verte » a pour contraire « aucune verte », c'est-à-dire « deux rouges » :

$$P(\text{au moins une verte}) = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} = 0{,}64$$

Pourquoi le contraire est le bon chemin. Dénombrer directement « au moins une verte » demanderait trois cas : verte puis rouge ($2 \times 3 = 6$), rouge puis verte (6), verte puis verte (4), soit 16 ✓ Même résultat, trois fois plus de travail.

Le rôle de la remise. Elle garantit que la composition de l'urne est identique aux deux tirages : les 5 issues du second tirage sont les mêmes qu'au premier. Sans remise, le second tirage n'aurait que 4 issues.

Réponse. a) 25 — b) $\frac{9}{25} = 0{,}36$ — c) $\frac{16}{25} = 0{,}64$.

Correction de l'exercice 8 – Les trois questions

a) Chaque question a 4 réponses possibles, indépendamment des autres :

$$4 \times 4 \times 4 = 64 \text{ façons}$$

b) Pour tout faux, il faut choisir une mauvaise réponse à chaque question, soit 3 possibilités par question :

$$3 \times 3 \times 3 = 27 \text{ issues} \qquad P(\text{tout faux}) = \frac{27}{64} \approx 0{,}422$$

c) **Par le contraire :**

$$P(\text{au moins une bonne}) = 1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64} \approx 0{,}578$$

Pourquoi le contraire s'impose. L'événement direct regroupe les cas « exactement une bonne », « exactement deux » et « les trois » : trois dénombrements distincts. Le contraire n'en demande qu'un.

La lecture du résultat. Un élève répondant totalement au hasard a plus d'une chance sur deux d'avoir au moins un point — mais seulement $\frac{1}{64} \approx 1{,}6\%$ de tout réussir.

Réponse. a) 64 — b) $\frac{27}{64} \approx 0{,}42$ — c) $\frac{37}{64} \approx 0{,}58$.

Correction de l'exercice 9 – Le contraire d'un contraire

a) **La formule du cours :**

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}28 = 0{,}72$$

b) Le contraire de $\overline{A}$ a pour probabilité

$$1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}72 = 0{,}28$$

c) On retrouve exactement $P(A)$: **le contraire du contraire est l'événement de départ.**

$$\overline{\overline{A}} = A$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

L'explication. $\overline{A}$ rassemble toutes les issues qui ne sont pas dans A ; son contraire rassemble donc toutes celles qui ne sont pas dans $\overline{A}$, c'est-à-dire celles de A. Rien n'est ajouté ni perdu.

L'usage pratique. Cette propriété autorise à calculer dans le sens le plus commode : si $\overline{A}$ est plus facile à dénombrer, on le fait et on conclut par soustraction, sans crainte de perdre l'équivalence.

Réponse. a) 0,72 — b) 0,28 — c) le contraire du contraire est l'événement initial.

Correction de l'exercice 10 – La roue et les secteurs

a) $P(\text{gain}) = \dfrac{3}{20} = 0{,}15$.

b) **Par le contraire :** $P(\text{rien}) = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$.

c) Les deux tours sont indépendants — la roue ne garde pas mémoire du tour précédent. Sur $20 \times 20 = 400$ issues, celles sans aucun gain sont $17 \times 17 = 289$:

$$P(\text{rien deux fois}) = \frac{289}{400} = 0{,}7225$$

d) **Par le contraire :**

$$P(\text{au moins un lot}) = 1 - 0{,}7225 = 0{,}2775$$

Le contrôle de bon sens. Jouer deux fois augmente les chances de gagner : $0{,}2775 > 0{,}15$ ✓ Mais pas au point de les doubler : $0{,}2775 < 0{,}30$, car le cas du double gain ne se compte qu'une fois.

L'erreur à éviter. $2 \times 0{,}15 = 0{,}30$ compterait deux fois la situation où l'on gagne aux deux tours. L'écart, 0,0225, est précisément la probabilité de ce double gain : $0{,}15 \times 0{,}15 = 0{,}0225$ ✓

Réponse. a) 0,15 — b) 0,85 — c) 0,7225 — d) 0,2775.

Correction de l'exercice 11 – Les anniversaires du mois

a) $P(\text{janvier}) = \dfrac{4}{25} = 0{,}16$.

b) **Par le contraire :** $P(\overline{\text{janvier}}) = 1 - 0{,}16 = 0{,}84$.

c) Avec remise, chaque tirage a 25 issues. Les élèves non nés en janvier sont 21 :

$$P = \frac{21 \times 21}{25 \times 25} = \frac{441}{625} = 0{,}7056$$

Le chemin par les probabilités : $0{,}84 \times 0{,}84 = 0{,}7056$ ✓

La probabilité complémentaire. « Au moins un né en janvier » vaut $1 - 0{,}7056 = 0{,}2944$, soit près de 30% : bien plus que les 16% d'un seul tirage.

Le rôle de la remise. Sans remise, le second tirage porterait sur 24 élèves et le calcul changerait. L'énoncé précise « avec remise » précisément pour que les deux tirages soient identiques et indépendants.

Réponse. a) 0,16 — b) 0,84 — c) 0,7056.

Correction de l'exercice 12 – Le complément dans un tableau

a) $80 - 52 = 28$ membres mineurs.

b) $P(\text{mineur}) = \dfrac{28}{80} = \dfrac{7}{20} = 0{,}35$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Contrôle par le contraire : $P(\text{majeur}) = \frac{52}{80} = 0{,}65$, et $0{,}35 + 0{,}65 = 1$ ✓

c) Les licenciés depuis plus de trois ans sont 35, donc les autres sont $80 - 35 = 45$:

$$P = \frac{45}{80} = \frac{9}{16} = 0{,}5625$$

Par le contraire : $1 - \frac{35}{80} = 1 - 0{,}4375 = 0{,}5625$ ✓

L'information inutilisée. Les 28 majeurs licenciés de longue date ne servent à aucune des trois questions : un énoncé contient souvent plus de données que nécessaire. Savoir écarter ce qui n'est pas demandé fait partie du travail.

Le tableau complet, si l'on en avait besoin : majeurs anciens 28, majeurs récents 24, mineurs anciens 7, mineurs récents 21 — total 80 ✓

Réponse. a) 28 — b) 0,35 — c) 0,5625.

Correction de l'exercice 13 – Trois dés

a) Chaque dé a 6 résultats, et ils se combinent :

$$6 \times 6 \times 6 = 216 \text{ issues}$$

b) Pour n'avoir aucun 1, chaque dé doit donner l'une des cinq autres faces :

$$5 \times 5 \times 5 = 125 \text{ issues} \qquad P = \frac{125}{216} \approx 0{,}579$$

c) **Par le contraire :**

$$P(\text{au moins un 1}) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} \approx 0{,}421$$

Pourquoi le dénombrement direct serait impraticable. Il faudrait distinguer « exactement un 1 », « exactement deux » et « trois » : trois calculs délicats. Le contraire se compte en une multiplication.

Le contrôle d'ordre de grandeur. Avec un seul dé, la probabilité d'un 1 vaut $\frac{1}{6} \approx 0{,}167$. Avec trois dés, elle doit augmenter sans atteindre $3 \times 0{,}167 \approx 0{,}5$: 0,421 convient ✓

Réponse. a) 216 — b) $\frac{125}{216} \approx 0{,}58$ — c) $\frac{91}{216} \approx 0{,}42$.

Correction de l'exercice 14 – Deviner une probabilité manquante

a) La somme des probabilités de toutes les issues vaut 1 :

$$P_3 + P_4 = 1 - (0{,}18 + 0{,}25) = 1 - 0{,}43 = 0{,}57$$

b) La quatrième est deux fois la troisième : $P_4 = 2P_3$. Donc

$$P_3 + 2P_3 = 0{,}57 \Rightarrow 3P_3 = 0{,}57 \Rightarrow P_3 = 0{,}19$$

et $P_4 = 2 \times 0{,}19 = 0{,}38$.

Contrôle : $0{,}18 + 0{,}25 + 0{,}19 + 0{,}38 = 1$ ✓ et $0{,}38 = 2 \times 0{,}19$ ✓

Les deux propriétés mobilisées. La somme des probabilités vaut 1 — c'est ce qui donne 0,57 — et la relation de l'énoncé permet de partager cette somme. Sans la première, le problème n'aurait pas de solution unique.

Le contrôle d'encadrement. Les quatre probabilités sont bien entre 0 et 1 ✓ Trouver $P_3 = 0{,}19$ et $P_4 = 0{,}76$ aurait donné une somme de 1,38 : impossible.

Réponse. a) 0,57 — b) $P_3 = 0{,}19$ et $P_4 = 0{,}38$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : la boîte de chocolats

a) $P(\text{noir}) = \dfrac{10}{24} = \dfrac{5}{12} \approx 0{,}417$.

b) **Par le contraire :** $P(\text{blanc}) = \dfrac{5}{24}$, donc

$$P(\overline{\text{blanc}}) = 1 - \frac{5}{24} = \frac{19}{24} \approx 0{,}792$$

Contrôle direct : $10 + 9 = 19$ chocolats non blancs ✓

c) Avec remise, chaque tirage a 24 issues, dont 14 non noires :

$$P(\text{aucun noir}) = \frac{14 \times 14}{24 \times 24} = \frac{196}{576} = \frac{49}{144} \approx 0{,}340$$

d) **Par le contraire :**

$$P(\text{au moins un noir}) = 1 - \frac{49}{144} = \frac{95}{144} \approx 0{,}660$$

Le contrôle de bon sens. Deux prises augmentent les chances d’un noir : $0{,}660 > 0{,}417$ ✓ sans atteindre le double, 0,834, puisque le cas des deux noirs ne se compte qu’une fois.

Le bilan de la plaquette. « Au moins un » appelle toujours le contraire : « aucun ». C’est le réflexe à installer.

Réponse. a) $\dfrac{5}{12}$ — b) $\dfrac{19}{24}$ — c) $\dfrac{49}{144} \approx 0{,}34$ — d) $\dfrac{95}{144} \approx 0{,}66$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).