

Plaquette 4 – Expériences à deux étapes

Probabilités – Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le nombre d'issues. Si la première étape a a issues et la seconde b :

$$\text{nombre total d'issues} = a \times b$$

Le tableau à double entrée. Une ligne par issue de la première étape, une colonne par issue de la seconde ; chaque case est une issue de l'expérience complète.

Avec ou sans remise.

Situation	Issues de la seconde étape
avec remise	les mêmes qu'à la première
sans remise	une de moins

L'ordre compte-t-il ? « Rouge puis verte » et « verte puis rouge » sont deux issues distinctes quand on tire successivement. Si l'énoncé demande « une rouge et une verte », il faut compter les deux.

Probabilité en situation d'équiprobabilité :

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cases favorables}}{\text{nombre total de cases}}$$

L'arbre des possibles remplace le tableau quand il y a plus de deux étapes, ou quand les issues ne sont pas équiprobables.

Le contrôle. Le nombre de cases du tableau doit valoir $a \times b$, et la somme des probabilités de toutes les issues doit valoir 1.

Correction de l'exercice 1 – Le dé et la pièce

a) Le dé a 6 issues, la pièce 2 :

$$6 \times 2 = 12 \text{ issues}$$

Ce sont P1, P2, P3, P4, P5, P6, F1, F2, F3, F4, F5, F6.

b) Les issues favorables sont P2, P4, P6 : trois cases.

$$P = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0,25$$

c) « Supérieur à 4 » signifie 5 ou 6. Les issues favorables sont F5 et F6 :

$$P = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \approx 0,167$$

Le contrôle par les probabilités séparées. $P(\text{pile}) = \frac{1}{2}$ et $P(\text{pair}) = \frac{1}{2}$, et leur produit vaut $\frac{1}{4}$ ✓ Les deux étapes sont indépendantes : le dé ne sait pas ce qu'a fait la pièce.

La méthode générale. Énumérer les 12 issues garantit qu'aucune n'est oubliée. Avec beaucoup d'issues, le tableau à double entrée organise cette énumération.

Réponse. a) 12 — b) $\frac{1}{4}$ — c) $\frac{1}{6}$.

Correction de l'exercice 2 - Le tableau des deux dés

a) $6 \times 6 = 36$ issues, chacune de probabilité $\frac{1}{36}$.

b) Les couples donnant 7 sont (1; 6), (2; 5), (3; 4), (4; 3), (5; 2), (6; 1) : **six façons**. Il faut bien compter (1; 6) et (6; 1) séparément, car les deux dés sont distincts.

c) $P(\text{somme} = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0,167$.

d) **La somme 7 est la plus probable**. Les autres sommes ont moins de décompositions : 6 et 8 en ont cinq, 2 et 12 une seule.

$$P(\text{somme} = 2) = \frac{1}{36} \quad P(\text{somme} = 7) = \frac{6}{36}$$

L'erreur classique. Croire que les onze sommes possibles (2 à 12) sont équiprobables, ce qui donnerait $\frac{1}{11}$ pour chacune. Faux : les **couples** sont équiprobables, pas les sommes.

Le contrôle. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$ ✓ toutes les issues sont réparties.

Réponse. a) 36 — b) 6 façons — c) $\frac{1}{6}$ — d) la somme 7.

Correction de l'exercice 3 - Deux tirages avec remise

a) Chaque tirage porte sur 10 boules, et la remise les rend identiques :

$$10 \times 10 = 100 \text{ issues}$$

b) Il faut une rouge à chaque tirage :

$$4 \times 4 = 16 \text{ issues} \quad P = \frac{16}{100} = 0,16$$

c) Deux ordres sont possibles. **Rouge puis bleue** : $4 \times 6 = 24$. **Bleue puis rouge** : $6 \times 4 = 24$. Total 48 issues :

$$P = \frac{48}{100} = 0,48$$

Le contrôle par la somme. Deux bleues : $6 \times 6 = 36$ issues, soit 0,36. Et

$$0,16 + 0,48 + 0,36 = 1$$

Le contrôle est concluant ✓

Les trois cas — deux rouges, une de chaque, deux bleues — couvrent toutes les issues.

Le piège de c). Oublier un des deux ordres donnerait 0,24, soit la moitié du bon résultat. Dès que l'énoncé dit « dans un ordre quelconque », il faut compter les deux sens.

Réponse. a) 100 — b) 0,16 — c) 0,48.

Correction de l'exercice 4 - Deux tirages sans remise

a) Le premier tirage a 5 issues, le second seulement 4 — la boule tirée n'est pas remise :

$$5 \times 4 = 20 \text{ issues}$$

b) Pour deux vertes : 3 choix au premier tirage, puis 2 vertes restantes :

$$3 \times 2 = 6 \text{ issues} \quad P = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0,3$$

c) Pour deux jaunes : 2 choix, puis 1 seule jaune restante :

$$2 \times 1 = 2 \text{ issues} \quad P = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0,1$$

Le contrôle. Une verte et une jaune : $3 \times 2 + 2 \times 3 = 12$ issues, soit 0,6. Et
 $0,3 + 0,1 + 0,6 = 1$

Le total attendu est bien retrouvé ✓

La comparaison avec la remise. Avec remise, deux vertes vaudraient $\frac{9}{25} = 0,36$, et deux jaunes $\frac{4}{25} = 0,16$. Sans remise, les deux probabilités **diminuent** : après avoir tiré une boule, il en reste une de moins de cette couleur.

Réponse. a) 20 — b) 0,3 — c) 0,1.

Correction de l'exercice 5 - L'erreur de Léo

a) Sans remise, le second tirage ne porte plus que sur 4 boules :

$$5 \times 4 = 20 \text{ issues}$$

Léo a appliqué la formule du tirage **avec** remise.

b) Pour deux rouges : 2 choix au premier tirage, puis une seule rouge restante :

$$2 \times 1 = 2 \text{ issues} \quad P = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0,1$$

c) **Avec remise**, il y aurait 25 issues et $2 \times 2 = 4$ favorables :

$$P = \frac{4}{25} = 0,16$$

L'écart s'explique. Sans remise, après une première rouge il n'en reste qu'une sur quatre boules, contre deux sur cinq avec remise. La probabilité chute de 0,16 à 0,10.

Le réflexe à installer. Avant tout dénombrement, chercher dans l'énoncé les mots « avec remise », « sans remise », ou « simultanément » — ce dernier se traite comme un tirage sans remise.

Réponse. a) 20 issues et non 25 — b) 0,1 — c) avec remise, 0,16.

Correction de l'exercice 6 - Le menu du restaurant

a) Chaque choix se combine avec tous les autres :

$$3 \times 4 \times 2 = 24 \text{ menus}$$

b) Les menus contenant la salade sont ceux où l'entrée est fixée, les autres choix restant libres :

$$1 \times 4 \times 2 = 8 \text{ menus} \quad P = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

On pouvait le voir directement : une entrée sur trois.

c) Entrée et dessert fixés, seul le plat varie :

$$1 \times 4 \times 1 = 4 \text{ menus} \quad P = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

Le contrôle par les probabilités séparées. $P(\text{salade}) = \frac{1}{3}$ et $P(\text{ce dessert}) = \frac{1}{2}$, et

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

Les deux chemins concordent ✓

Le principe multiplicatif. À trois étapes, on multiplie les trois nombres d'issues. C'est

la même règle qu'à deux étapes, prolongée — et elle vaut pour autant d'étapes qu'on veut.

Réponse. a) 24 menus — b) $\frac{1}{3}$ — c) $\frac{1}{6}$.

Correction de l'exercice 7 - Le tableau des deux urnes

a) L'urne A a 3 boules, l'urne B en a 4 :

$$3 \times 4 = 12 \text{ issues}$$

b) Deux rouges : 2 choix dans A, 1 dans B :

$$2 \times 1 = 2 \text{ issues} \quad P = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

c) **Deux rouges** : 2 issues. **Deux vertes** : $1 \times 3 = 3$ issues. Total 5 :

$$P(\text{même couleur}) = \frac{5}{12} \approx 0,417$$

Le contrôle par le contraire. Couleurs différentes : rouge dans A et verte dans B ($2 \times 3 = 6$), ou verte dans A et rouge dans B ($1 \times 1 = 1$), soit 7 issues. Et $5 + 7 = 12$ ✓

$$P(\text{couleurs différentes}) = \frac{7}{12} \approx 0,583$$

La difficulté propre à cet exercice. Les deux urnes n'ont ni le même effectif ni la même composition : on ne peut pas raisonner « par symétrie », il faut dénombrer case par case.

Réponse. a) 12 — b) $\frac{1}{6}$ — c) $\frac{5}{12}$.

Correction de l'exercice 8 - Deux lancers de pièce

a) Les issues sont **PP, PF, FP, FF** : quatre issues équiprobables, chacune de probabilité $\frac{1}{4}$.

b) « Exactement un pile » correspond à PF et FP : deux issues.

$$P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$$

c) « Deux résultats identiques » correspond à PP et FF : deux issues également.

$$P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

L'erreur célèbre. Croire qu'il n'y a que trois issues — « deux piles », « un de chaque », « deux faces » — et conclure $\frac{1}{3}$ pour chacune. Faux : « un de chaque » se réalise de **deux** façons, PF et FP, car les deux lancers sont distincts.

Le contrôle expérimental. Sur 400 doubles lancers, on observerait environ 100 PP, 100 PF, 100 FP et 100 FF — donc environ 200 fois « un de chaque », et non 133. C'est un fait vérifiable, et il tranche le débat.

Réponse. a) PP, PF, FP, FF — b) $\frac{1}{2}$ — c) $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 9 - La somme des deux dés

Il y a 36 issues équiprobables.

a) Sommes 2, 3 ou 4. Les couples sont (1; 1) ; (1; 2), (2; 1) ; (1; 3), (2; 2), (3; 1) : $1 + 2 + 3 = 6$ issues.

$$P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

b) Sommes 11 ou 12. Les couples sont (5; 6), (6; 5) et (6; 6) : 3 issues.

$$P = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

c) **Par dénombrement direct.** Le nombre de couples donnant chaque somme est 4 pour 5, 5 pour 6, 6 pour 7, 5 pour 8 et 4 pour 9 :

$$4 + 5 + 6 + 5 + 4 = 24 \text{ issues} \quad P = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

Le contrôle par le contraire. Les sommes exclues sont celles inférieures ou égales à 4 (6 issues), la somme 10 (3 issues) et celles supérieures à 10 (3 issues), soit 12 issues en tout :

$$36 - 12 = 24$$

L'égalité est vérifiée ✓

Le piège à éviter. Il ne suffit pas de retrancher les réponses de a) et b) : la somme 10 n'appartient à aucun des deux, elle doit être exclue séparément. Un passage par le contraire n'est valable que si les événements retranchés couvrent **exactement** tout le complément.

Réponse. a) $\frac{1}{6}$ — b) $\frac{1}{12}$ — c) $\frac{2}{3}$.

Correction de l'exercice 10 - Les codes à deux chiffres

a) Chaque position a 10 possibilités, indépendamment de l'autre :

$$10 \times 10 = 100 \text{ codes}$$

b) Un seul code est correct :

$$P = \frac{1}{100} = 0,01 = 1\%$$

c) Les codes à chiffres identiques sont 00, 11, 22, ..., 99 : **dix codes**.

$$P = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0,1$$

Pourquoi 100 et non 90. Le code 00 est valide, et le premier chiffre peut être 0 : toutes les combinaisons de deux chiffres sont autorisées. Un code à trois chiffres en donnerait 1000, et à quatre chiffres 10 000 — d'où la sécurité des codes de carte bancaire.

Le contrôle de c). Un code sur dix a ses deux chiffres identiques : une fois le premier chiffre fixé, le second n'a qu'une valeur possible sur dix ✓

Réponse. a) 100 — b) 0,01 — c) 0,1.

Correction de l'exercice 11 - Le tirage simultané

a) Un tirage simultané ne distingue pas l'ordre : la paire {1; 2} est la même que {2; 1}. Les paires sont

$$\{1; 2\}; \{1; 3\}; \{1; 4\}; \{1; 5\}; \{2; 3\}; \{2; 4\}; \{2; 5\}; \{3; 4\}; \{3; 5\}; \{4; 5\}$$

b) Il y en a 10.

Le lien avec le tirage successif. Sans remise et en tenant compte de l'ordre, il y aurait $5 \times 4 = 20$ issues. Chaque paire y apparaît **deux fois**, dans les deux ordres : $\frac{20}{2} = 10$ ✓

c) Les paires de somme 7 sont {2; 5} et {3; 4} : deux paires.

$$P = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0,2$$

Le vocabulaire décisif. « Simultanément » signifie que l'ordre ne compte pas ; « successivement sans remise » signifie qu'il compte. Les probabilités d'un même événement sont d'ailleurs identiques dans les deux cas — ici $\frac{4}{20} = \frac{2}{10}$ ✓ — car on divise numérateur et dénominateur par 2.

Réponse. b) 10 paires — c) $\frac{1}{5}$.

Correction de l'exercice 12 - L'arbre des possibles

a) Chaque tirage a 3 issues, et la remise les rend identiques :

$$3 \times 3 \times 3 = 27 \text{ issues}$$

b) Pour trois noires, il faut une noire à chaque tirage :

$$2 \times 2 \times 2 = 8 \text{ issues} \quad P = \frac{8}{27} \approx 0,296$$

c) **Par l'événement contraire** — « au moins une blanche » a pour contraire « aucune blanche », c'est-à-dire « trois noires » :

$$P(\text{au moins une blanche}) = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27} \approx 0,704$$

Pourquoi l'arbre plutôt que le tableau. À trois étapes, un tableau à double entrée ne suffit plus : il faudrait trois dimensions. L'arbre, lui, se prolonge à autant d'étapes qu'on veut — chaque nœud se ramifie en trois branches.

Le contrôle de bon sens. La boule blanche sort avec probabilité $\frac{1}{3}$ à chaque tirage ; sur trois tirages, il serait étonnant de ne jamais la voir. 0,704 est cohérent ✓

Réponse. a) 27 — b) $\frac{8}{27} \approx 0,30$ — c) $\frac{19}{27} \approx 0,70$.

Correction de l'exercice 13 - Les deux roues

a) $4 \times 3 = 12$ issues équiprobables.

b) Les couples de produit 6 sont (2; 3), (3; 2) — et (6; 1) n'existe pas, la roue A n'ayant pas de 6. Soit 2 **issues** :

$$P = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

c) **Par le contraire.** Un produit est impair seulement si les deux facteurs le sont : roue A donne 1 ou 3 (2 choix), roue B donne 1 ou 3 (2 choix), soit 4 issues.

$$P(\text{produit pair}) = 1 - \frac{4}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Le contrôle par dénombrement direct. Les produits pairs viennent des cases où au moins un facteur est pair : roue A paire (2 ou 4) avec n'importe quel B ($2 \times 3 = 6$ cases), plus roue A impaire avec B pair ($2 \times 1 = 2$ cases), soit 8 ✓

La règle de parité mobilisée. Un produit est impair si et seulement si tous ses facteurs le sont : c'est ce qui rend le passage par le contraire si efficace ici.

Réponse. a) 12 — b) $\frac{1}{6}$ — c) $\frac{2}{3}$.

Correction de l'exercice 14 - Le sac et le dé

a) 5 jetons et 6 faces :

$$5 \times 6 = 30 \text{ issues}$$

b) Jeton rouge (2 choix) et face 6 (1 choix) :

$$2 \times 1 = 2 \text{ issues} \quad P = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

c) Jeton bleu (3 choix) et nombre impair — 1, 3 ou 5, soit 3 choix :

$$3 \times 3 = 9 \text{ issues} \quad P = \frac{9}{30} = \frac{3}{10} = 0,3$$

Le contrôle par les probabilités séparées. $P(\text{bleu}) = \frac{3}{5}$ et $P(\text{impair}) = \frac{1}{2}$:

$$\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

Le contrôle est concluant ✓

L'indépendance des deux étapes. Le résultat du dé ne dépend en rien du jeton tiré : c'est ce qui autorise à multiplier les nombres d'issues, puis les probabilités. Dans un tirage sans remise, cette indépendance disparaîtrait.

Réponse. a) 30 — b) $\frac{1}{15}$ — c) $\frac{3}{10}$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : la tombola à deux tickets

a) Le premier tirage a 20 issues, le second 19 :

$$20 \times 19 = 380 \text{ issues}$$

b) Deux gagnants : 4 choix puis 3 restants :

$$4 \times 3 = 12 \text{ issues} \quad P = \frac{12}{380} = \frac{3}{95} \approx 0,032$$

c) Aucun gagnant : 16 choix puis 15 restants :

$$16 \times 15 = 240 \text{ issues} \quad P = \frac{240}{380} = \frac{12}{19} \approx 0,632$$

d) **Par le contraire :**

$$P(\text{au moins un gagnant}) = 1 - \frac{12}{19} = \frac{7}{19} \approx 0,368$$

Le contrôle par la somme. Exactement un gagnant : $4 \times 16 + 16 \times 4 = 128$ issues, soit $\frac{128}{380} \approx 0,337$. Et

$$0,032 + 0,337 + 0,632 \approx 1$$

Le total attendu est bien retrouvé ✓

Le bilan de la plaquette. Dénombrer les issues d'abord, repérer s'il y a remise, puis passer par le contraire dès qu'apparaît « au moins un ». Ces trois réflexes couvrent l'essentiel des exercices à deux étapes.

Réponse. a) 380 — b) $\frac{3}{95} \approx 0,03$ — c) $\frac{12}{19} \approx 0,63$ — d) $\frac{7}{19} \approx 0,37$.