

Plaqueette 5 - Bilan et problèmes

Probabilités — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les formules du chapitre.

$$P(A) = \frac{\text{issues favorables}}{\text{issues totales}} \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad \text{nombre d'issues à deux étapes} = a \times b$$

La check-list du problème.

Question	Ce qu'on vérifie
quelles sont les issues ?	et sont-elles équiprobables ?
y a-t-il remise ?	le second tirage a-t-il autant d'issues ?
l'ordre compte-t-il ?	« successivement » oui, « simultanément » non
l'énoncé dit « au moins » ?	passer par le contraire

Les trois erreurs à ne jamais commettre.

- compter les catégories au lieu des objets ;
- additionner les probabilités d'événements qui se recoupent ;
- confondre « au plus un » et « aucun » dans un contraire.

Estimer un nombre de succès sur n répétitions : environ $n \times P(A)$ — toujours avec le mot « environ ».

Le contrôle final. Toute probabilité est entre 0 et 1 ; la somme de celles de toutes les issues vaut 1 ; une probabilité proche de 1 décrit un événement très probable, proche de 0 un événement rare.

Correction de l'exercice 1 - Étude complète d'une urne

Effectif total : $8 + 5 + 7 = 20$ boules équiprobables.

a) $P(\text{verte}) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0,25$.

b) **Par le contraire :** $P(\text{rouge}) = \frac{8}{20} = 0,4$, donc
 $P(\overline{\text{rouge}}) = 1 - 0,4 = 0,6$

c) Rouge et bleu sont incompatibles, on peut additionner :

$$P = \frac{8}{20} + \frac{7}{20} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} = 0,75$$

d) **Contrôle :** $0,4 + 0,25 + 0,35 = 1$ ✓ Et l'événement de c) est exactement le contraire de « verte » : $1 - 0,25 = 0,75$ ✓

Deux chemins, un résultat. La question c) se traite par addition ou par complément : quand les deux concordent, la réponse est sûre. C'est le contrôle le plus rapide du chapitre.

Réponse. a) 0,25 — b) 0,6 — c) 0,75 — d) somme = 1 ✓

Correction de l'exercice 2 - Le jeu de la roue

a) $16 - 2 - 6 = 8$ secteurs ne donnent rien.

b) Les secteurs gagnants sont $2 + 6 = 8$:

$$P(\text{gain}) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} = 0,5$$

c) $P(10 \text{ €}) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$, donc sur 80 tours :

$$80 \times \frac{1}{8} = 10 \text{ gains de } 10 \text{ €}$$

d) Sur 80 tours, on attend aussi $80 \times \frac{6}{16} = 30$ gains de 2 €. Le total gagné vaut

$$10 \times 10 + 30 \times 2 = 100 + 60 = 160 \text{ €}$$

pour une mise totale de $80 \times 2 = 160 \text{ €}$. **Le jeu est équitable** : en moyenne, le joueur récupère sa mise.

Le sens de « équitable ». Cela ne signifie pas que chaque joueur repart à l'équilibre — une partie donne 0, 2 ou 10 € — mais que sur un grand nombre de parties, gains et mises se compensent.

Réponse. a) 8 — b) 0,5 — c) environ 10 gains — d) oui, 160 € gagnés pour 160 € misés.

Correction de l'exercice 3 - Le contrôle qualité

a) $P(\text{défaut}) = \frac{50}{2000} = 0,025 = 2,5\%$.

b) **Par le contraire** : $P(\text{conforme}) = 1 - 0,025 = 0,975 = 97,5\%$.

c) On attend environ

$$300 \times 0,025 = 7,5 \text{ défauts}$$

soit 7 ou 8 pièces.

d) 11 défauts, c'est un peu plus que les 7,5 attendus, mais l'écart reste dans les fluctuations possibles d'un échantillon de 300 pièces. **Il n'y a pas lieu de s'inquiéter sur ce seul constat.**

Ce qui déclencherait une alerte. Un résultat très éloigné — 30 défauts, par exemple, soit quatre fois la prévision — ou une série de plusieurs échantillons tous au-dessus de 7,5. Un écart isolé ne prouve rien ; une tendance répétée, si.

La valeur non entière de c). 7,5 défauts n'a pas de sens concret, mais c'est bien la valeur attendue en moyenne sur de nombreux échantillons.

Réponse. a) 0,025 — b) 0,975 — c) environ 7,5 défauts — d) non, l'écart reste plausible.

Correction de l'exercice 4 - Les deux pièces truquées

a) **Par le contraire** :

$$P(\text{face}) = 1 - 0,7 = 0,3$$

b) Les deux lancers sont indépendants, donc les probabilités se multiplient :

$$P(\text{PP}) = 0,7 \times 0,7 = 0,49$$

c) **Par le contraire** : « au moins une face » a pour contraire « deux piles » :

$$P = 1 - 0,49 = 0,51$$

Pourquoi on ne compte pas d'issues ici. La pièce étant truquée, les issues ne sont **pas**

équiprobables : la formule des issues favorables ne s'applique pas. On travaille directement avec les probabilités données.

Le contrôle par les quatre issues. $PP = 0,49$, $PF = 0,7 \times 0,3 = 0,21$, $FP = 0,21$, $FF = 0,09$. Somme :

$$0,49 + 0,21 + 0,21 + 0,09 = 1$$

Les deux chemins concordent ✓

et « au moins une face » $= 0,21 + 0,21 + 0,09 = 0,51$ ✓

Réponse. a) 0,3 — b) 0,49 — c) 0,51.

Correction de l'exercice 5 - Le sondage du collège

a) $260 - 140 = 120$ élèves de cycle 3 sont demi-pensionnaires.

b) $P(DP) = \frac{260}{600} = \frac{13}{30} \approx 0,433$.

c) Les élèves de cycle 4 externes sont $350 - 140 = 210$:

$$P = \frac{210}{600} = \frac{7}{20} = 0,35$$

Le tableau complet :

Catégorie	Effectif
cycle 3 demi-pensionnaires	120
cycle 3 externes	130
cycle 4 demi-pensionnaires	140
cycle 4 externes	210

Contrôle : $120 + 130 + 140 + 210 = 600$ ✓

La méthode à retenir. Quand deux caractères se croisent, remplir le tableau des quatre catégories avant de calculer : chaque case devient un dénombrement immédiat, et le total garantit qu'aucun élève n'est oublié ni compté deux fois.

Réponse. a) 120 — b) $\frac{13}{30} \approx 0,43$ — c) 0,35.

Correction de l'exercice 6 - Le tirage de deux cartes

a) $32 \times 31 = 992$ issues.

b) Il y a 4 as : 4 choix puis 3 restants.

$$4 \times 3 = 12 \text{ issues} \quad P = \frac{12}{992} = \frac{3}{248} \approx 0,012$$

c) Les cartes qui ne sont pas des as sont 28 :

$$28 \times 27 = 756 \text{ issues} \quad P = \frac{756}{992} = \frac{189}{248} \approx 0,762$$

d) **Par le contraire :**

$$P(\text{au moins un as}) = 1 - \frac{189}{248} = \frac{59}{248} \approx 0,238$$

Le contrôle par la somme. Exactement un as : $4 \times 28 + 28 \times 4 = 224$ issues, soit $\frac{224}{992} \approx 0,226$. Et

$$0,012 + 0,226 + 0,762 = 1$$

L'égalité est vérifiée ✓

L'ordre de grandeur. Environ une chance sur quatre de voir au moins un as en deux cartes : c'est plus que les $\frac{1}{8} = 0,125$ d'une seule carte, sans atteindre le double.

Réponse. a) 992 — b) environ 0,012 — c) environ 0,762 — d) environ 0,238.

Correction de l'exercice 7 - L'erreur de raisonnement

a) $P(\text{face}) = \frac{1}{2} = 0,5$, exactement comme aux cinq lancers précédents.

b) **La pièce n'a pas de mémoire.** Chaque lancer est indépendant des précédents : la pièce ne « sait » pas qu'elle est tombée cinq fois sur pile, et rien ne la pousse à compenser. Ce raisonnement porte un nom, **l'erreur du joueur**.

c) Avant de commencer, la probabilité de cinq piles d'affilée valait

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} \approx 0,031$$

soit environ 3%.

La distinction essentielle. $\frac{1}{32}$ est la probabilité **avant** les lancers, quand les cinq résultats sont encore inconnus. Une fois les cinq piles sortis, ils sont acquis : il ne reste qu'un lancer à venir, de probabilité $\frac{1}{2}$.

L'illustration décisive. Obtenir six piles d'affilée a pour probabilité $\frac{1}{64}$ **au départ**. Mais sachant que les cinq premiers sont sortis, il ne reste qu'à obtenir un pile : $\frac{1}{2}$, et non $\frac{1}{64}$.

Réponse. a) 0,5 — b) les lancers sont indépendants — c) $\frac{1}{32} \approx 0,03$.

Correction de l'exercice 8 - Le jeu des trois portes

a) Une enveloppe gagnante sur trois :

$$P = \frac{1}{3} \approx 0,333$$

b) Deux joueurs prennent deux enveloppes distinctes. Pour qu'aucun ne gagne, il faut que les deux enveloppes choisies soient vides — or il n'y en a que deux vides, donc c'est possible : ils prennent exactement les deux vides.

Le nombre de paires d'enveloppes est 3 ($\{1; 2\}$, $\{1; 3\}$, $\{2; 3\}$), et une seule ne contient pas la gagnante :

$$P(\text{aucun ne gagne}) = \frac{1}{3}$$

c) **Par le contraire :**

$$P(\text{au moins un gagne}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \approx 0,667$$

Le contrôle direct. Sur les trois paires possibles, deux contiennent l'enveloppe gagnante ✓

La lecture du résultat. Deux joueurs sur trois enveloppes couvrent les deux tiers des possibilités : c'est exactement la proportion d'enveloppes ouvertes, $\frac{2}{3}$ ✓

Réponse. a) $\frac{1}{3}$ — b) $\frac{1}{3}$ — c) $\frac{2}{3}$.

Correction de l'exercice 9 - Les deux dés et le gain

a) $6 \times 6 = 36$ issues.

b) Les issues gagnantes sont les six doubles : (1; 1), (2; 2), ..., (6; 6).

$$P(\text{gain}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0,167$$

c) $180 \times \frac{1}{6} = 30$ gains attendus.

d) Sur 180 parties, le joueur mise 180 € et récupère $30 \times 5 = 150$ €. Il perd donc environ 30 € : **le jeu n'est pas avantageux** pour lui.

Le calcul du gain équitable. Pour que le jeu soit équilibré, il faudrait un gain g tel que

$$30 \times g = 180 \Rightarrow g = 6 \text{ €}$$

Un gain de 6 € rendrait le jeu équitable ; à 5 €, l'organisateur conserve en moyenne un sixième des mises.

La règle générale. Un jeu est équitable si le gain vaut l'inverse de la probabilité, fois la mise : ici $\frac{1}{1/6} \times 1 = 6 \text{ €}$ ✓

Réponse. a) 36 — b) $\frac{1}{6}$ — c) environ 30 gains — d) non, il faudrait 6 € de gain.

Correction de l'exercice 10 - Le questionnaire à choix multiples

a) $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ façons.

b) Une seule combinaison est entièrement correcte :

$$P(\text{tout juste}) = \frac{1}{81} \approx 0,012$$

c) Pour tout rater, il faut choisir une mauvaise réponse à chaque question, soit 2 possibilités par question :

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 \quad P = \frac{16}{81} \approx 0,198$$

d) **Par le contraire :**

$$P(\text{au moins une bonne}) = 1 - \frac{16}{81} = \frac{65}{81} \approx 0,802$$

La lecture du résultat. Un élève répondant totalement au hasard a environ 80% de chances d'avoir au moins un point, mais seulement 1,2% de tout réussir.

L'effet du nombre de choix. Avec 4 réponses par question au lieu de 3, « tout juste » tomberait à $\frac{1}{256} \approx 0,004$. Plus il y a de distracteurs, moins le hasard paie.

Réponse. a) 81 — b) $\frac{1}{81} \approx 0,012$ — c) $\frac{16}{81} \approx 0,198$ — d) $\frac{65}{81} \approx 0,80$.

Correction de l'exercice 11 - Le sac de bonbons

a) $15 \times 14 = 210$ issues.

b) Deux fraises : 9 choix puis 8 restants.

$$9 \times 8 = 72 \text{ issues} \quad P = \frac{72}{210} = \frac{12}{35} \approx 0,343$$

c) Deux ordres possibles. **Fraise puis citron** : $9 \times 6 = 54$. **Citron puis fraise** : $6 \times 9 = 54$. Total 108 :

$$P = \frac{108}{210} = \frac{18}{35} \approx 0,514$$

Le contrôle par la somme. Deux citrons : $6 \times 5 = 30$ issues, soit $\frac{30}{210} = \frac{1}{7} \approx 0,143$. Et

$$\frac{12}{35} + \frac{18}{35} + \frac{5}{35} = \frac{35}{35} = 1$$

Le contrôle est concluant ✓

Le résultat le plus probable. Obtenir un de chaque parfum est le cas le plus fréquent, avec plus d'une chance sur deux : c'est logique, puisque deux ordres y conduisent.

Réponse. a) 210 — b) $\frac{12}{35} \approx 0,34$ — c) $\frac{18}{35} \approx 0,51$.

Correction de l'exercice 12 - La loterie du club

a) Les billets gagnants sont $2 + 13 + 45 = 60$:

$$P(\text{gain}) = \frac{60}{300} = \frac{1}{5} = 0,2$$

b) **Par le contraire** : $P(\text{rien}) = 1 - 0,2 = 0,8$.

c) Avec n billets, la probabilité de détenir l'un des 2 gros lots vaut environ $\frac{2n}{300}$. On cherche

$$\frac{2n}{300} \geq 0,1 \Rightarrow 2n \geq 30 \Rightarrow n \geq 15$$

Il faut donc acheter au moins 15 **billets**.

Vérification : $\frac{2 \times 15}{300} = \frac{30}{300} = 0,1$ ✓

La limite de l'approximation. Le calcul suppose que les gros lots ne peuvent pas être détenus tous les deux par la même personne, ce qui est légèrement faux. Pour 15 billets sur 300, l'écart est négligeable ; il ne le serait plus si l'on en achetait 200.

Réponse. a) 0,2 — b) 0,8 — c) au moins 15 billets.

Correction de l'exercice 13 - Le dé pipé

a) La somme des six probabilités vaut 1. Les cinq autres faces se partagent

$$1 - 0,3 = 0,7$$

Étant équiprobables entre elles, chacune vaut

$$\frac{0,7}{5} = 0,14$$

b) Les faces paires sont 2, 4 et 6 :

$$P = 0,14 + 0,14 + 0,3 = 0,58$$

c) Les faces 5 et 6 :

$$P = 0,14 + 0,3 = 0,44$$

Le contrôle. Somme des six probabilités : $5 \times 0,14 + 0,3 = 0,7 + 0,3 = 1$ ✓

Ce que le truquage change. Avec un dé équilibré, $P(\text{pair}) = 0,5$ et $P(\geq 5) = \frac{1}{3} \approx 0,333$.

Le pipage relève les deux, parce que le 6 appartient aux deux événements.

La formule qui ne s'applique plus. Les issues n'étant pas équiprobables, on ne peut plus compter les faces favorables : il faut **additionner les probabilités** de chaque issue concernée.

Réponse. a) 0,14 chacune — b) 0,58 — c) 0,44.

Correction de l'exercice 14 - Deux urnes au choix

a) $P_A = \frac{3}{10} = 0,3$ et $P_B = \frac{7}{25} = 0,28$.

b) **L'urne A**, légèrement plus favorable.

Contrôle par les produits en croix : $3 \times 25 = 75$ et $10 \times 7 = 70$. Comme $75 > 70$, on a $P_A > P_B$ ✓

c) Les deux tirages sont indépendants, les probabilités se multiplient :

$$P(\text{deux gains}) = 0,3 \times 0,28 = 0,084$$

d) **Par le contraire.** Ne rien gagner signifie perdre aux deux :

$$0,7 \times 0,72 = 0,504 \quad P(\text{au moins un gain}) = 1 - 0,504 = 0,496$$

Le contrôle par les quatre cas. Gagner A seulement : $0,3 \times 0,72 = 0,216$. Gagner B seulement : $0,7 \times 0,28 = 0,196$. Et

$$0,084 + 0,216 + 0,196 + 0,504 = 1$$

Le total attendu est bien retrouvé ✓

et $0,084 + 0,216 + 0,196 = 0,496$ ✓

Réponse. a) 0,3 et 0,28 — b) l'urne A — c) 0,084 — d) 0,496.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : la kermesse

a) Le dé a 6 issues, l'urne 5 :

$$6 \times 5 = 30 \text{ issues}$$

b) Les issues gagnantes croisent « dé ≥ 5 » (2 faces : 5 et 6) et « boule rouge » (2 boules) :

$$2 \times 2 = 4 \text{ issues} \quad P(\text{gain}) = \frac{4}{30} = \frac{2}{15} \approx 0,133$$

c) **Par le contraire :**

$$P(\text{perte}) = 1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15} \approx 0,867$$

d) $150 \times \frac{2}{15} = 20$ gains attendus.

Le contrôle par les probabilités séparées. $P(\text{dé} \geq 5) = \frac{1}{3}$ et $P(\text{rouge}) = \frac{2}{5}$:

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$$

Les deux chemins concordent ✓

Le bilan du chapitre. Dénombrer les issues du croisement, passer par le contraire pour la perte, puis traduire la probabilité en nombre de gains attendus : les trois gestes du chapitre en un seul problème.

Réponse. a) 30 — b) $\frac{2}{15} \approx 0,13$ — c) $\frac{13}{15} \approx 0,87$ — d) environ 20 gains.