

Plaquette 1 – Reconnaître une situation de proportionnalité

Proportionnalité — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. Deux suites de nombres sont proportionnelles s'il existe un nombre k , appelé **coefficient de proportionnalité**, tel que chaque valeur de la seconde s'obtienne en multipliant la première par k :

$$y = k \times x \quad \text{donc} \quad k = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

Le test. On calcule le quotient $\frac{y}{x}$ pour chaque couple : s'il est **constant**, il y a proportionnalité ; sinon, non.

Sur un tableau.

x	2	5	8
y	6	15	24

Les quotients valent 3, 3 et 3 : le tableau est proportionnel, de coefficient 3.

Ce qui n'est pas de la proportionnalité.

Situation	Pourquoi
un tarif avec abonnement fixe	il reste un prix à payer pour 0 article
l'aire d'un carré selon son côté	doubler le côté quadruple l'aire
l'âge d'une personne selon l'année	l'écart est constant, pas le quotient

Le repère qui ne trompe pas. Dans une situation proportionnelle, à **zéro** correspond **zéro** : 0 litre coûte 0 euro.

Les produits en croix. Dans un tableau de proportionnalité, les produits en croix sont égaux :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{équivalent à} \quad a \times d = b \times c$$

Correction de l'exercice 1 - Le tableau est-il proportionnel ?

Le test du cours : on calcule le quotient de la seconde ligne par la première.

$$k = \frac{y}{x}$$

Premier tableau.

$$\frac{7}{2} = 3,5 \quad \frac{17,5}{5} = 3,5 \quad \frac{28}{8} = 3,5$$

Le quotient est constant : il y a **proportionnalité**, de coefficient 3,5 (le prix au kilogramme).

Second tableau.

$$\frac{12}{1} = 12 \quad \frac{36}{3} = 12 \quad \frac{70}{6} \approx 11,67$$

Le troisième quotient diffère : **pas de proportionnalité**. Pour qu'il y en ait, la distance à

6 h devrait valoir 72 km.

Ce qu'il faut retenir. Deux couples qui « marchent » ne suffisent pas : il faut tester **tous** les couples. Ici, l'erreur ne se voyait qu'à la troisième colonne.

Réponse. Premier tableau : proportionnel, $k = 3,5$. Second : non ($70 \neq 72$).

Correction de l'exercice 2 - Trouver le coefficient

a) Le coefficient est le quotient de la surface par le volume :

$$k = \frac{24}{3} = 8$$

Un litre couvre 8 m^2 de mur.

b) On multiplie par le coefficient :

$$7 \times 8 = 56 \text{ m}^2$$

c) On fait l'opération inverse, la division :

$$\frac{100}{8} = 12,5 \text{ L}$$

Vérification : $12,5 \times 8 = 100 \text{ m}^2 \checkmark$

Les deux coefficients. Pour passer du volume à la surface, on multiplie par 8 ; pour revenir, on multiplie par $\frac{1}{8} = 0,125$. Ce sont deux nombres inverses l'un de l'autre, et c'est toujours le cas dans une situation proportionnelle.

Le contrôle de bon sens. 7 L, c'est un peu plus du double de 3 L : la surface devait être un peu plus du double de $24 \text{ m}^2 \checkmark$

Réponse. a) $k = 8 \text{ m}^2/\text{L}$ — b) 56 m^2 — c) 12,5 L.

Correction de l'exercice 3 - Compléter un tableau

Le coefficient. On le calcule sur la colonne complète :

$$k = \frac{10}{4} = 2,5$$

Chaque cahier coûte 2,50 €.

Deuxième colonne : $7 \times 2,5 = 17,50 \text{ €}$.

Troisième colonne : on connaît le prix, on cherche le nombre de cahiers, donc on divise :

$$\frac{30}{2,5} = 12$$

Quatrième colonne : $15 \times 2,5 = 37,50 \text{ €}$.

Nombre de cahiers	4	7	12	15
Prix (€)	10	17,50	30	37,50

Le contrôle. Tous les quotients valent bien 2,5 : $\frac{17,5}{7} = 2,5$ et $\frac{37,5}{15} = 2,5 \checkmark$

Le sens des deux opérations. On **multiplie** par le coefficient pour descendre dans le tableau, on **divise** pour remonter. Se tromper de sens donne ici $30 \times 2,5 = 75$ cahiers, un résultat absurde pour 30 €.

Réponse. 17,50 € ; 12 cahiers ; 37,50 €.

Correction de l'exercice 4 - Proportionnel ou pas ?

a) **Proportionnalité.** Le prix est le nombre de litres multiplié par le prix au litre :

$P = k \times V$. Pour 0 litre, on paie 0 € ✓

b) **Pas de proportionnalité.** Le prix s'écrit $P = 3 + 1,2d$. Pour 0 km, on paie déjà 3 € : le quotient $\frac{P}{d}$ n'est pas constant. Pour 10 km, il vaut $\frac{15}{10} = 1,5$; pour 20 km, $\frac{27}{20} = 1,35$.

c) **Proportionnalité.** Le périmètre vaut $P = 4c$: c'est exactement la forme $y = kx$, avec $k = 4$.

d) **Pas de proportionnalité.** L'aire vaut $A = c^2$. En doublant le côté de 3 à 6, l'aire passe de 9 à 36, soit quatre fois plus et non deux fois.

Le critère décisif. Ce n'est pas « quand l'une augmente, l'autre augmente » — c'est vrai dans les quatre cas. C'est la **constance du quotient**, qui n'est vérifiée qu'en a) et c).

Réponse. a) et c) proportionnelles — b) prise en charge fixe — d) l'aire varie comme le carré.

Correction de l'exercice 5 - L'erreur de Tom

a) Doubler le nombre d'ouvriers doit **diviser** la durée par deux, pas la multiplier : le mur sera construit deux fois plus vite. Tom a inversé le sens de la variation.

b) Avec 10 ouvriers, la durée est

$$\frac{12}{2} = 6 \text{ jours}$$

c) Ce qui est proportionnel au nombre d'ouvriers, c'est le **travail fourni par jour**, pas la durée. Le chantier représente $5 \times 12 = 60$ journées-ouvrier. Pour n ouvriers, la durée est

$$d = \frac{60}{n}$$

Pour $n = 10$: $d = 6$ jours ✓ Pour $n = 20$: $d = 3$ jours.

Le nom de cette situation. Le produit $n \times d$ est constant : les deux grandeurs sont **inversement proportionnelles**. Le quotient $\frac{d}{n}$, lui, ne l'est pas — il vaut 2,4 pour $n = 5$ et 0,6 pour $n = 10$.

Réponse. b) 6 jours — c) le produit ouvriers $\times$ jours est constant (60).

Correction de l'exercice 6 - La recette pour huit

Le coefficient par personne. On divise chaque quantité par 4 : 50 g de farine, 0,75 œuf et 12,5 cL de lait par personne.

a) **Pour 6 personnes**, on multiplie par 6 :

$$6 \times 50 = 300 \text{ g} \quad 6 \times 0,75 = 4,5 \text{ œufs} \quad 6 \times 12,5 = 75 \text{ cL}$$

En pratique, on arrondira à 4 ou 5 œufs.

b) **Pour 10 personnes** : 500 g de farine, 7,5 œufs et 125 cL de lait.

c) On divise la masse disponible par la masse par personne :

$$\frac{500}{50} = 10 \text{ personnes}$$

Le passage direct, sans repasser par l'unité. De 4 à 6 personnes, on multiplie par $\frac{6}{4} = 1,5$: $200 \times 1,5 = 300 \text{ g}$ ✓ C'est souvent plus rapide, surtout quand la quantité pour une personne n'est pas un nombre commode — comme les 0,75 œuf.

Réponse. a) 300 g, 4,5 œufs, 75 cL — b) 500 g, 7,5 œufs, 125 cL — c) 10 personnes.

Correction de l'exercice 7 - Deux colonnes seulement

a) Le coefficient est $k = \frac{12}{3} = 4$.

b) **Colonne** (7; ?) : $7 \times 4 = 28$.

Colonne (?, 60) : on divise, $\frac{60}{4} = 15$.

Colonne (0,5; ?) : $0,5 \times 4 = 2$.

c) Pour $x = 9$, la valeur attendue est $9 \times 4 = 36$, et non 35. Le couple (9; 35) ne peut donc **pas** figurer dans ce tableau.

Le contrôle par les produits en croix :

$$\frac{12}{3} = \frac{35}{9} ? \quad 12 \times 9 = 108 \quad 3 \times 35 = 105$$

Les produits diffèrent : confirmation ✓

Ce que l'écart révèle. 35 et 36 sont très proches : à l'œil, rien ne distingue les deux. Seul le calcul — coefficient ou produits en croix — permet de trancher, ce qui est précisément pourquoi on dispose de ces outils.

Réponse. a) $k = 4$ — b) 28 ; 15 ; 2 — c) non, il faudrait 36.

Correction de l'exercice 8 - Les produits en croix

La règle du cours.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ équivaut à } a \times d = b \times c$$

a) On écrit $\frac{15}{6} = \frac{x}{10}$, donc $6x = 150$ et $x = 25$.

b) On écrit $\frac{9}{4} = \frac{22,5}{x}$, donc $9x = 90$ et $x = 10$.

c) On écrit $\frac{7}{2,5} = \frac{x}{6}$, donc $2,5x = 42$ et

$$x = \frac{42}{2,5} = 16,8$$

Contrôle par le coefficient. En c), $k = \frac{7}{2,5} = 2,8$, et $6 \times 2,8 = 16,8$ ✓

Quand préférer les produits en croix. Quand le coefficient ne tombe pas juste : ici 2,8 est encore commode, mais pour un couple comme (7; 12) le coefficient vaudrait $\frac{12}{7}$, et il vaudrait mieux ne jamais le calculer.

Réponse. a) 25 — b) 10 — c) 16,8.

Correction de l'exercice 9 - Le coefficient inverse

a) $k_1 = \frac{54}{6} = 9$: un mètre de fil pèse 9 g.

b) $k_2 = \frac{6}{54} = \frac{1}{9} \approx 0,111$: un gramme correspond à $\frac{1}{9}$ de mètre.

c) Leur produit vaut

$$9 \times \frac{1}{9} = 1$$

Ce sont donc bien deux nombres **inverses**.

d) On divise la masse par 9, ou on multiplie par $\frac{1}{9}$:

$$\frac{150}{9} = \frac{50}{3} \approx 16,7 \text{ m}$$

Pourquoi les deux coefficients sont inverses. Passer de la longueur à la masse, puis revenir, doit redonner la longueur de départ : on multiplie par k_1 puis par k_2 , et le produit doit valoir 1. C'est vrai dans toute situation de proportionnalité.

Le contrôle : $16,7 \times 9 \approx 150 \text{ g}$ ✓

Réponse. a) 9 g/m — b) $\frac{1}{9}$ m/g — c) produit égal à 1 — d) environ 16,7 m.

Correction de l'exercice 10 - Le graphique

a) **Proportionnalité.** Une droite passant par l'origine traduit exactement la relation

$$y = k \times x$$

où k est la pente de la droite. À $x = 0$ correspond $y = 0$: c'est la signature de la proportionnalité.

b) **Pas de proportionnalité.** La relation est de la forme $y = kx + 5$: pour $x = 0$, on a déjà $y = 5$. C'est la situation du taxi avec prise en charge, ou de l'abonnement.

c) **Pas de proportionnalité.** Si les points ne sont pas alignés, le quotient $\frac{y}{x}$ ne peut pas être constant.

Le test graphique en une phrase. Il y a proportionnalité si et seulement si les points sont **alignés avec l'origine** — les deux conditions comptent. Une droite qui ne passe pas par $(0; 0)$ décrit une situation affine, pas proportionnelle, et c'est la confusion la plus répandue.

Réponse. a) oui — b) non (ordonnée à l'origine non nulle) — c) non.

Correction de l'exercice 11 - Les tailles d'un dessin

a) Le coefficient est le quotient de la nouvelle largeur par l'ancienne :

$$k = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} \approx 1,67$$

b) On applique le même coefficient à la longueur :

$$18 \times \frac{5}{3} = \frac{90}{3} = 30 \text{ cm}$$

Le dessin agrandi mesure 20 cm sur 30 cm.

c) **Non.** L'aire initiale vaut $12 \times 18 = 216 \text{ cm}^2$, la nouvelle $20 \times 30 = 600 \text{ cm}^2$. Le rapport vaut

$$\frac{600}{216} = \frac{25}{9} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \approx 2,78$$

L'aire est multipliée par le **carré** du coefficient, pas par le coefficient.

La règle générale. Dans un agrandissement de rapport k , les longueurs sont multipliées par k , les aires par k^2 et les volumes par k^3 . C'est pourquoi l'aire d'un carré n'est pas proportionnelle à son côté.

Réponse. a) $k = \frac{5}{3}$ — b) 30 cm — c) non, l'aire est multipliée par $k^2 = \frac{25}{9}$.

Correction de l'exercice 12 - Deux tarifs de photocopies

a) **Le copieur A.** Son prix s'écrit $P_A = 0,08n$, de la forme $y = kx$: à zéro copie correspond zéro euro. Le copieur B, avec ses 2 € d'accès, s'écrit $P_B = 2 + 0,05n$: ce n'est pas proportionnel.

b) Pour $n = 50$: $P_A = 0,08 \times 50 = 4$ € ; $P_B = 2 + 0,05 \times 50 = 2 + 2,50 = 4,50$ €.

c) On cherche n tel que $P_B < P_A$, en résolvant d'abord l'égalité :

$$2 + 0,05n = 0,08n \Rightarrow 2 = 0,03n \Rightarrow n = \frac{2}{0,03} \approx 66,7$$

Le copieur B devient plus avantageux **à partir de 67 copies.**

Vérification : pour $n = 67$, $P_A = 5,36$ € et $P_B = 2 + 3,35 = 5,35$ € ✓

Ce que l'exercice illustre. La proportionnalité n'est pas synonyme d'avantage : le tarif proportionnel gagne sur les petites quantités, l'autre sur les grandes.

Réponse. a) le copieur A — b) 4 € et 4,50 € — c) à partir de 67 copies.

Correction de l'exercice 13 - Le mélange de peinture

a) Le rapport blanc/bleu vaut $\frac{5}{2} = 2,5$. Pour 7 doses de bleu :

$$7 \times 2,5 = 17,5 \text{ doses de blanc}$$

b) Le rapport bleu/blanc vaut $\frac{2}{5} = 0,4$. Pour 30 doses de blanc :

$$30 \times 0,4 = 12 \text{ doses de bleu}$$

c) Avec 6 doses de bleu, il faudrait $6 \times 2,5 = 15$ doses de blanc : on n'en a que 12. Le blanc est donc le **facteur limitant**.

Avec 12 doses de blanc, il faut $12 \times 0,4 = 4,8$ doses de bleu. On obtiendra $12 + 4,8 = 16,8$ doses de teinte, et il restera $6 - 4,8 = 1,2$ dose de bleu.

Le raisonnement à retenir. Quand deux ingrédients sont en quantité fixée, on teste chacun comme limitant et on garde le plus contraignant. Appliquer la proportionnalité au seul bleu aurait donné une recette impossible.

Réponse. a) 17,5 doses — b) 12 doses — c) le blanc limite : 16,8 doses de teinte.

Correction de l'exercice 14 - Le tableau incomplet

Le test sur les trois colonnes complètes.

$$\frac{7,5}{3} = 2,5 \quad \frac{12,5}{5} = 2,5 \quad \frac{22,5}{9} = 2,5$$

Le quotient est constant : le tableau **est** proportionnel, de coefficient 2,5.

La dernière colonne : $12 \times 2,5 = 30$.

x	3	5	9	12
y	7,5	12,5	22,5	30

Un second chemin, sans coefficient. $12 = 3 + 9$, et dans un tableau de proportionnalité on peut additionner les colonnes : $7,5 + 22,5 = 30$ ✓

Pourquoi ce second chemin fonctionne. Si $y_1 = kx_1$ et $y_2 = kx_2$, alors $y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2)$: la somme de deux colonnes est encore une colonne du tableau. C'est une propriété commode quand le coefficient n'est pas un nombre rond.

Réponse. Proportionnel, $k = 2,5$; la valeur manquante est 30.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : trois situations

a) **Proportionnalité.** Le volume s'écrit $V = 15t$: à 0 minute correspond 0 litre.

$$V = 15 \times 7 = 105 \text{ L}$$

b) **Pas de proportionnalité.** Le prix s'écrit $P = 30 + 2n$: il y a une part fixe. Pour 8 séances :

$$P = 30 + 2 \times 8 = 46 \text{ €}$$

Le quotient $\frac{46}{8} = 5,75 \text{ €}$ par séance n'a rien de constant : pour 20 séances, il vaudrait $\frac{70}{20} = 3,50 \text{ €}$.

c) **Proportionnalité.** La consommation est proportionnelle à la distance, de coefficient $\frac{6,5}{100} = 0,065 \text{ L/km}$:

$$250 \times 0,065 = 16,25 \text{ L}$$

On peut aussi raisonner directement : 250 km, c'est 2,5 fois 100 km, donc $6,5 \times 2,5 = 16,25 \text{ L}$ ✓

Le bilan. Le repère est toujours le même : existe-t-il une part fixe ? Si oui, pas de proportionnalité ; sinon, un seul coefficient suffit à tout calculer.

Réponse. a) oui, 105 L — b) non, 46 € — c) oui, 16,25 L.