

Plaquette 2 - La quatrième proportionnelle

Proportionnalité — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le problème type. Dans le tableau

a	c
b	x

la proportionnalité impose $\frac{b}{a} = \frac{x}{c}$, donc

$$x = \frac{b \times c}{a}$$

Trois méthodes, un seul résultat.

Méthode	Geste
passage par l'unité	on calcule la valeur pour 1, puis on multiplie
coefficient	on calcule $k = \frac{b}{a}$, puis $x = k \times c$
produits en croix	on écrit $a \times x = b \times c$

Échelles. Une échelle est un rapport de longueurs, sans unité :

$$\text{échelle} = \frac{\text{longueur sur le plan}}{\text{longueur réelle}}$$

Une échelle $\frac{1}{200}$ signifie que 1 cm sur le plan représente 200 cm, soit 2 m, dans la réalité.

Conversions utiles. 1 m = 100 cm, 1 km = 1000 m = 100 000 cm.

Le contrôle d'ordre de grandeur. Avant de poser le calcul, on estime : « c'est un peu plus du double », « c'est environ le tiers ». Un résultat dix fois trop grand se repère ainsi immédiatement.

Correction de l'exercice 1 - Le prix au kilo

c) **Méthode 1 — passage par l'unité.** Un kilo coûte $\frac{7,20}{3} = 2,40$ €.

Méthode 2 — produits en croix. On écrit $\frac{7,20}{3} = \frac{x}{5}$, donc

$$x = \frac{7,20 \times 5}{3} = \frac{36}{3} = 12$$

a) Les deux méthodes donnent 12 € pour 5 kg. Avec la première : $5 \times 2,40 = 12$ € ✓

b) On divise le budget par le prix au kilo :

$$\frac{18}{2,40} = 7,5 \text{ kg}$$

Vérification : $7,5 \times 2,40 = 18$ € ✓

Le contrôle d'ordre de grandeur. 5 kg, c'est un peu plus de 3 kg : le prix devait être un

peu plus de 7,20 €, mais bien en dessous du double. 12 € convient ✓ Un résultat comme 120 € aurait sauté aux yeux.

Réponse. a) 12 € — b) 7,5 kg.

Correction de l'exercice 2 - Quand le coefficient ne tombe pas juste

a) On divise : $\frac{154}{7} = 22$ €. Le coefficient tombe ici parfaitement.

b) $11 \times 22 = 242$ €.

Par les produits en croix, sans calculer le prix unitaire :

$$\frac{154}{7} = \frac{x}{11} \Rightarrow 7x = 154 \times 11 = 1694 \Rightarrow x = 242$$

Même résultat, mais avec une multiplication à trois chiffres : ici le passage par l'unité est plus simple.

c) $13 \times 22 = 286$ €, donc **moins** de 300 €.

Estimation de tête pour c). 13 places à un peu plus de 20 € font environ 260 € ; à 23 € elles feraient 299 €. Le résultat devait être proche de 300 € sans l'atteindre ✓

Le choix de la méthode. Quand la première division tombe juste, le passage par l'unité gagne ; sinon, les produits en croix évitent de traîner une valeur approchée dans tout le calcul.

Réponse. a) 22 € — b) 242 € — c) 286 €, donc moins de 300 €.

Correction de l'exercice 3 - La carte au 1/25 000

a) L'échelle signifie que 1 cm sur la carte représente 25 000 cm dans la réalité, c'est-à-dire

$$25\,000\text{ cm} = 250\text{ m} = 0,25\text{ km}$$

b) On multiplie par 7 :

$$7 \times 250 = 1750\text{ m} = 1,75\text{ km}$$

c) On divise la distance réelle par celle représentée par 1 cm. En centimètres, 3,5 km = 350 000 cm :

$$\frac{350\,000}{25\,000} = 14\text{ cm}$$

Vérification : $14 \times 0,25 = 3,5\text{ km}$ ✓

Le piège des unités. L'échelle est un rapport **sans unité** : les deux longueurs doivent être exprimées dans la même unité avant d'être comparées. C'est l'oubli le plus fréquent, et il fausse le résultat d'un facteur 100 ou 1000.

Réponse. a) 250 m — b) 1,75 km — c) 14 cm.

Correction de l'exercice 4 - La maquette du bateau

a) On divise la longueur réelle par 80. En centimètres, 24 m = 2400 cm :

$$\frac{2400}{80} = 30\text{ cm}$$

b) On multiplie par 80 :

$$18 \times 80 = 1440\text{ cm} = 14,4\text{ m}$$

c) Une **réduction** : l'échelle $\frac{1}{80}$ est inférieure à 1, donc la maquette est 80 fois plus

petite que l'original.

Le repère. Une échelle inférieure à 1 donne une réduction (cartes, maquettes) ; une échelle supérieure à 1 donne un agrandissement (dessin d'un insecte, schéma d'un circuit). L'échelle $\frac{1}{1}$ est la taille réelle.

Le contrôle de vraisemblance. Un mât de 14,4 m pour un bateau de 24 m : proportions crédibles ✓ Un mât de 144 m aurait signalé une erreur de conversion.

Réponse. a) 30 cm — b) 14,4 m — c) une réduction.

Correction de l'exercice 5 - Le change

a) On divise : $\frac{270}{250} = 1,08$. Un euro vaut 1,08 dollar.

b) On multiplie :

$$400 \times 1,08 = 432 \text{ dollars}$$

c) On fait l'opération inverse :

$$\frac{189}{1,08} = 175 \text{ €}$$

Vérification : $175 \times 1,08 = 189$ ✓

Le contrôle de sens. L'euro vaut plus que le dollar, donc un montant en dollars correspond à **moins** d'euros : 189 dollars donnent 175 €, c'est cohérent ✓ Trouver 204 € aurait signalé une multiplication au lieu d'une division.

La double lecture. Le taux 1,08 dollar par euro a pour inverse $\frac{1}{1,08} \approx 0,926$ euro par dollar. Les deux nombres décrivent le même change : on choisit celui qui évite une division.

Réponse. a) 1,08 dollar — b) 432 dollars — c) 175 €.

Correction de l'exercice 6 - La masse volumique

a) On divise la masse par le volume :

$$\frac{405}{150} = 2,7 \text{ g/cm}^3$$

C'est la **masse volumique** de l'aluminium.

b) On multiplie :

$$500 \times 2,7 = 1350 \text{ g} = 1,35 \text{ kg}$$

c) 1 kg = 1000 g, donc le volume vaut

$$\frac{1000}{2,7} \approx 370 \text{ cm}^3$$

Vérification : $370 \times 2,7 = 999 \text{ g} \approx 1 \text{ kg}$ ✓

Pourquoi c'est proportionnel. Pour un même matériau, doubler le volume double la masse : le quotient masse/volume est constant. C'est ce qui définit la masse volumique — un coefficient de proportionnalité qui caractérise le matériau, 2,7 pour l'aluminium contre 7,8 pour le fer.

Réponse. a) 2,7 g/cm³ — b) 1,35 kg — c) environ 370 cm³.

Correction de l'exercice 7 - L'erreur de Julie

a) 10 stylos coûtent forcément **plus** que 4 stylos, donc plus de 6 €, et même plus du double. Un résultat de 6,70 € est impossible.

b) **Le calcul correct**, par les produits en croix :

$$x = \frac{6 \times 10}{4} = \frac{60}{4} = 15 \text{ €}$$

Par le passage par l'unité : un stylo coûte $\frac{6}{4} = 1,50$ €, donc 10 stylos coûtent 15 € ✓

c) **Le repère infallible**. On écrit la formule avec les grandeurs, pas seulement les nombres :

$$\text{prix cherché} = \frac{\text{prix connu} \times \text{quantité cherchée}}{\text{quantité connue}}$$

Le nombre qui accompagne la grandeur cherchée doit être **au numérateur**, et celui de même nature que lui au dénominateur. Julie a placé les quantités et les prix à l'envers.

Le réflexe qui sauve. Estimer avant de calculer : « 10 stylos, c'est 2,5 fois 4 stylos, donc environ 15 € ». Le calcul ne fait plus que confirmer.

Réponse. a) $6,70 < 6 \times 2$, impossible — b) $\frac{6 \times 10}{4} = 15$ €.

Correction de l'exercice 8 - Le papier peint

a) On divise la surface à couvrir par la surface d'un rouleau :

$$\frac{46}{5,3} \approx 8,68$$

On ne peut pas acheter 0,68 rouleau : il en faut 9, en arrondissant **au supérieur**.

b) $9 \times 18 = 162$ €.

c) Les 9 rouleaux couvrent $9 \times 5,3 = 47,7 \text{ m}^2$, soit

$$47,7 - 46 = 1,7 \text{ m}^2$$

de surplus.

Le point de méthode. La proportionnalité donne 8,68 rouleaux, mais le contexte impose un nombre entier — et un arrondi **par excès**, sinon il manquerait du papier. Arrondir à 9 n'est pas une approximation : c'est la réponse correcte au problème posé.

Le contrôle. Avec 8 rouleaux, on couvrirait $42,4 \text{ m}^2$: insuffisant pour 46 m^2 ✓

Réponse. a) 9 rouleaux — b) 162 € — c) $1,7 \text{ m}^2$ en trop.

Correction de l'exercice 9 - Le débit du robinet

a) En 40 s coulent 12 L. En 60 s, par proportionnalité :

$$\frac{12 \times 60}{40} = \frac{720}{40} = 18 \text{ L/min}$$

b) On divise le volume par le débit :

$$\frac{180}{18} = 10 \text{ minutes}$$

c) On multiplie le débit par la durée :

$$5 \times 18 = 90 \text{ L}$$

Vérification : 90 L, c'est la moitié de la baignoire, remplie en 5 min soit la moitié de 10

min ✓

L'attention aux unités. Le débit s'exprime en litres **par minute** : toutes les durées doivent donc être en minutes. Calculer avec 40 secondes comme s'il s'agissait de minutes donnerait un débit de 0,3 L/min, soixante fois trop petit.

Réponse. a) 18 L/min — b) 10 min — c) 90 L.

Correction de l'exercice 10 - La consommation de la voiture

a) On ramène à 100 km :

$$\frac{42 \times 100}{600} = \frac{4200}{600} = 7 \text{ L/100 km}$$

b) Avec 7 L pour 100 km, 55 L permettent de parcourir

$$\frac{55 \times 100}{7} \approx 786 \text{ km}$$

c) Pour 250 km, la consommation vaut $\frac{250 \times 7}{100} = 17,5$ L, donc un coût de

$$17,5 \times 1,85 = 32,375 \approx 32,38 \text{ €}$$

Deux proportionnalités enchaînées. La consommation est proportionnelle à la distance, le prix est proportionnel à la consommation : le prix est donc proportionnel à la distance, avec un coefficient de $\frac{7 \times 1,85}{100} = 0,1295$ € par kilomètre.

Le contrôle : $250 \times 0,1295 = 32,375$ € ✓

Réponse. a) 7 L/100 km — b) environ 786 km — c) environ 32,38 €.

Correction de l'exercice 11 - Le champ et son rendement

a) On divise la récolte par la surface :

$$\frac{32}{4} = 8 \text{ t/ha}$$

b) On multiplie le rendement par la surface :

$$11 \times 8 = 88 \text{ tonnes}$$

c) On divise la récolte visée par le rendement :

$$\frac{100}{8} = 12,5 \text{ hectares}$$

Vérification : $12,5 \times 8 = 100$ t ✓

L'hypothèse implicite. Le calcul suppose que **tous** les hectares ont le même rendement — ce qui n'est vrai qu'approximativement dans la réalité : la qualité du sol varie. La proportionnalité est un modèle, valable tant que les conditions sont comparables.

Le contrôle d'ordre de grandeur. 11 ha, c'est un peu moins de trois fois 4 ha : la récolte devait approcher trois fois 32 t sans l'atteindre. 88 t convient ✓

Réponse. a) 8 t/ha — b) 88 tonnes — c) 12,5 hectares.

Correction de l'exercice 12 - Deux formats de lessive

a) **Petit bidon :** $\frac{9,50}{2,5} = 3,80$ € le litre.

Grand bidon : $\frac{14,80}{4} = 3,70$ € le litre.

b) Le **grand bidon** est plus avantageux, de 0,10 € par litre.

c) Pour 20 L, l'écart vaut

$$20 \times 0,10 = 2 \text{ €}$$

Vérification : 20 L au grand format coûtent $20 \times 3,70 = 74 \text{ €}$, au petit $20 \times 3,80 = 76 \text{ €}$ ✓

Pourquoi ramener au litre. Comparer 9,50 € et 14,80 € n'a aucun sens : ce ne sont pas les mêmes quantités. Le prix au litre est la grandeur qui permet la comparaison — c'est exactement le coefficient de proportionnalité, et c'est pourquoi la loi l'impose sur les étiquettes.

Réponse. a) 3,80 € et 3,70 € le litre — b) le bidon de 4 L — c) 2 € pour 20 L.

Correction de l'exercice 13 - Compléter par les produits en croix

Le coefficient : $\frac{60}{8} = 7,5$ pages par minute.

Deuxième colonne : $14 \times 7,5 = 105$ pages.

Troisième colonne : on divise, $\frac{150}{7,5} = 20$ minutes.

Quatrième colonne : $35 \times 7,5 = 262,5$ pages.

Temps (min)	8	14	20	35
Pages imprimées	60	105	150	262,5

Par les produits en croix, pour la troisième colonne :

$$\frac{60}{8} = \frac{150}{t} \Rightarrow 60t = 1200 \Rightarrow t = 20$$

Le commentaire sur la dernière valeur. 262,5 pages n'a pas de sens physique : on imprime des pages entières. Le modèle proportionnel donne une valeur moyenne ; dans la réalité, 35 minutes produiraient 262 pages, la dernière étant en cours d'impression.

Réponse. 105 pages ; 20 min ; 262,5 pages.

Correction de l'exercice 14 - Le plan de l'appartement

a) On multiplie chaque longueur par 50 :

$$12 \times 50 = 600 \text{ cm} = 6 \text{ m} \quad 9 \times 50 = 450 \text{ cm} = 4,5 \text{ m}$$

Le salon mesure 6 m sur 4,5 m.

b) Son aire vaut $6 \times 4,5 = 27 \text{ m}^2$.

c) **Non.** L'aire sur le plan vaut $12 \times 9 = 108 \text{ cm}^2$. L'aire réelle en centimètres carrés vaut $600 \times 450 = 270\,000 \text{ cm}^2$, et

$$\frac{270\,000}{108} = 2500 = 50^2$$

L'aire est 2500 fois plus grande, pas 50 fois.

La règle. Dans une réduction de rapport k , les longueurs sont divisées par k , les aires par k^2 et les volumes par k^3 . C'est pourquoi une maquette au $\frac{1}{10}$ tient dans une pièce alors que son volume est mille fois plus petit que l'original.

Réponse. a) 6 m sur 4,5 m — b) 27 m^2 — c) non, 2500 fois ($= 50^2$).

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : la sortie à vélo

a) En 45 min il fait 18 km, donc en 60 min :

$$\frac{18 \times 60}{45} = \frac{1080}{45} = 24 \text{ km}$$

Sa vitesse est de 24 km/h.

b) On divise la distance par la vitesse :

$$\frac{30}{24} = 1,25 \text{ h} = 1 \text{ h } 15 \text{ min}$$

c) La consommation d'eau est proportionnelle à la distance, de coefficient $\frac{0,5}{12}$ L/km :

$$54 \times \frac{0,5}{12} = \frac{27}{12} = 2,25 \text{ L}$$

d) $\frac{54}{24} = 2,25 \text{ h} = 2 \text{ h } 15 \text{ min}$.

Le contrôle croisé. 54 km, c'est trois fois 18 km : la durée devait être trois fois 45 min, soit 135 min = 2 h 15 min ✓ Et l'eau : 54 km, c'est 4,5 fois 12 km, donc $4,5 \times 0,5 = 2,25 \text{ L}$ ✓

Le bilan de la plaquette. Trois grandeurs — distance, durée, eau — toutes proportionnelles entre elles. Une fois un coefficient connu, toutes les questions se répondent par une multiplication ou une division.

Réponse. a) 24 km — b) 1 h 15 min — c) 2,25 L — d) 2 h 15 min.