

Plaquette 5 – Bilan et problèmes

Proportionnalité — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

La check-list du problème.

Question	Ce qu'on vérifie
quelles sont les deux grandeurs ?	on les nomme avec leurs unités
sont-elles proportionnelles ?	à zéro correspond-il zéro ?
quel est le coefficient ?	$k = \frac{y}{x}$
le résultat est-il crédible ?	ordre de grandeur, unité, contexte

Les formules du chapitre.

$$y = k \times x \quad x = \frac{b \times c}{a} \quad v = \frac{d}{t} \quad p\% \text{ de } N = \frac{p}{100} \times N$$

Les coefficients d'évolution.

$$+p\% = \times \left(1 + \frac{p}{100}\right) \quad -p\% = \times \left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

Les trois faux amis à connaître.

Situation	Erreur fréquente
tarif avec part fixe	croire à la proportionnalité
deux évolutions successives	additionner les taux
aire ou volume agrandis	multiplier par k au lieu de k^2 ou k^3

La dernière ligne d'un problème est une phrase avec l'unité, pas un nombre isolé.

Correction de l'exercice 1 – Proportionnel ou non ?

a) **Proportionnalité.** À vitesse constante, le nombre de pages s'écrit $n = k \times t$, et à 0 minute correspondent 0 page.

b) **Pas de proportionnalité.** Un enfant de 10 ans ne mesure pas le double d'un enfant de 5 ans, et à la naissance (0 an) il mesure déjà 50 cm. Le quotient taille/âge n'a rien de constant.

c) **Cela dépend de ce qu'on compte.** Le prix des billets seuls est proportionnel au nombre de trajets, mais la dépense totale inclut le prix de la carte :

$$\text{dépense} = \text{prix de la carte} + k \times n$$

Ce n'est donc pas proportionnel.

d) **Proportionnalité.** Le quotient masse/volume est la masse volumique du liquide, constante pour un liquide donné. À 0 litre correspondent 0 gramme.

Le test unique. Dans les quatre cas, la question « à zéro correspond-il zéro, et le quotient est-il constant ? » suffit à trancher.

Réponse. a) et d) proportionnelles — b) non — c) non, à cause du prix de la carte.

Correction de l'exercice 2 - Le chantier de peinture

a) $18 \times 25 + 120 = 450 + 120 = 570 \text{ €}$.

b) **Non** : pour 0 m^2 , la facture s'élève déjà à 120 € . Le prix s'écrit $P = 18s + 120$, ce n'est pas de la forme $y = kx$.

c) On résout $18s + 120 = 660$, donc $18s = 540$ et $s = 30 \text{ m}^2$.

Vérification : $18 \times 30 + 120 = 540 + 120 = 660 \text{ €}$ ✓

d) **Pour** 25 m^2 : $\frac{570}{25} = 22,80 \text{ € /m}^2$.

Pour 50 m^2 : la facture vaut $900 + 120 = 1020 \text{ €}$, soit $\frac{1020}{50} = 20,40 \text{ € /m}^2$.

Ce que la variation du prix moyen prouve. Un quotient qui change avec la quantité est la signature de la **non**-proportionnalité. Le déplacement se dilue sur une plus grande surface : $\frac{120}{25} = 4,80 \text{ € /m}^2$ contre $\frac{120}{50} = 2,40 \text{ € /m}^2$.

Réponse. a) 570 € — b) non, part fixe de 120 € — c) 30 m^2 — d) $22,80$ puis $20,40 \text{ €/m}^2$.

Correction de l'exercice 3 - Le sirop à diluer

a) On multiplie par 6 :

$$15 \times 6 = 90 \text{ cL d'eau}$$

b) Une dose de boisson contient $1 + 6 = 7$ volumes. Le sirop représente donc $\frac{1}{7}$ de la boisson :

$$1,4 \times \frac{1}{7} = 0,2 \text{ L} = 20 \text{ cL de sirop}$$

Et il faut $1,4 - 0,2 = 1,2 \text{ L d'eau}$.

c) La proportion de sirop vaut

$$\frac{1}{7} \times 100 \approx 14,3\%$$

Le piège classique. « 1 pour 6 » ne signifie pas $\frac{1}{6}$ de la boisson, mais $\frac{1}{7}$: le total comprend le sirop **et** l'eau. Confondre les deux donnerait $16,7\%$ au lieu de $14,3\%$.

Le contrôle : $0,2 \text{ L}$ de sirop pour $1,2 \text{ L d'eau}$, soit bien un rapport de 1 à 6 ✓

Réponse. a) 90 cL — b) 20 cL de sirop — c) environ $14,3\%$.

Correction de l'exercice 4 - Le voyage scolaire

a) $\frac{4200}{35} = 120 \text{ € par élève}$.

b) $42 \times 120 = 5040 \text{ €}$.

c) On divise le budget par le coût unitaire :

$$\frac{3600}{120} = 30 \text{ élèves}$$

Vérification : $30 \times 120 = 3600 \text{ €}$ ✓

Le contrôle par les produits en croix, pour b) :

$$\frac{4200}{35} = \frac{x}{42} \Rightarrow 35x = 176400 \Rightarrow x = 5040$$

L'hypothèse de l'énoncé. La proportionnalité est **donnée** ici : dans la réalité, le car

coûterait le même prix pour 30 ou 42 élèves, et le coût par élève diminuerait. L'énoncé précise « proportionnel » justement parce que ce n'est pas évident.

Réponse. a) 120 € — b) 5040 € — c) 30 élèves.

Correction de l'exercice 5 - Les soldes en deux temps

a) **Première démarque :** $480 \times 0,75 = 360$ €.

Deuxième démarque : $360 \times 0,80 = 288$ €.

b) Le coefficient global vaut

$$0,75 \times 0,80 = 0,60$$

soit une réduction globale de 40%, et non 45%.

Vérification : $480 \times 0,60 = 288$ € ✓

c) On divise par le coefficient global :

$$\frac{360}{0,60} = 600 \text{ €}$$

Vérification : $600 \times 0,75 = 450$ €, puis $450 \times 0,80 = 360$ € ✓

La règle centrale du chapitre. Deux remises successives ne s'additionnent pas. Ici -25% et -20% donnent -40% : toujours **moins** que la somme des taux, parce que la seconde s'applique à une base déjà réduite.

Réponse. a) 360 € puis 288 € — b) -40% — c) 600 €.

Correction de l'exercice 6 - L'aquarium

a) On convertit en décimètres : $8 \text{ dm} \times 4 \text{ dm} \times 5 \text{ dm}$.

$$V = 8 \times 4 \times 5 = 160 \text{ dm}^3 = 160 \text{ L}$$

b) Les trois quarts de 160 L :

$$160 \times \frac{3}{4} = 120 \text{ L}$$

c) On divise le volume par le débit :

$$\frac{120}{12} = 10 \text{ minutes}$$

La conversion, étape décisive. En centimètres, le volume vaut $80 \times 40 \times 50 = 160\,000 \text{ cm}^3$, et comme $1 \text{ L} = 1000 \text{ cm}^3$, on retrouve 160 L ✓ Passer par les décimètres évite de manipuler six chiffres.

Le contrôle de vraisemblance. Un aquarium de 160 L pour ces dimensions est un format courant ✓ Trouver 16 L ou 1600 L aurait signalé une erreur de conversion.

Réponse. a) 160 L — b) 120 L — c) 10 minutes.

Correction de l'exercice 7 - L'agrandissement du terrain

a) $30 \times 1,5 = 45 \text{ m}$ et $20 \times 1,5 = 30 \text{ m}$.

b) **Aire initiale :** $30 \times 20 = 600 \text{ m}^2$. **Aire finale :** $45 \times 30 = 1350 \text{ m}^2$. Le rapport vaut

$$\frac{1350}{600} = 2,25 = 1,5^2$$

L'aire a été multipliée par 2,25, soit le **carré** du coefficient d'agrandissement.

c) Un coefficient de 2,25 correspond à une hausse de

$$2,25 - 1 = 1,25 = 125\%$$

Vérification : $600 \times 2,25 = 1350 \text{ m}^2$ ✓ et la hausse vaut 750 m^2 , soit $\frac{750}{600} \times 100 = 125\%$
✓

La règle à ne pas oublier. Agrandir de 50% chaque dimension n'augmente pas l'aire de 50% : les longueurs sont multipliées par k , les aires par k^2 . C'est le faux ami le plus coûteux du chapitre.

Réponse. a) 45 m sur 30 m — b) par 2,25 — c) +125%.

Correction de l'exercice 8 - Les deux ouvriers

a) $\frac{24}{6} = 4 \text{ m}^2$ par heure.

b) $\frac{100}{4} = 25$ heures.

c) Deux ouvriers posent 8 m^2 par heure, donc

$$\frac{100}{8} = 12,5 \text{ heures}$$

d) **Non.** Quand le nombre d'ouvriers double, la durée est **divisée** par deux : 25 h puis 12,5 h. Le quotient durée/nombre d'ouvriers n'est pas constant — il vaut 25 pour un ouvrier et 6,25 pour deux.

Ce qui est constant, c'est le **produit** :

$$1 \times 25 = 2 \times 12,5 = 25 \text{ heures-ouvrier}$$

Le nom de cette situation. Les deux grandeurs sont **inversement proportionnelles**. La surface posée par heure, elle, est bien proportionnelle au nombre d'ouvriers.

Réponse. a) $4 \text{ m}^2/\text{h}$ — b) 25 h — c) 12,5 h — d) non, inversement proportionnel.

Correction de l'exercice 9 - La hausse du carburant

a) Le coefficient vaut $\frac{1,88}{1,60} = 1,175$, soit une hausse de 17,5%.

b) **Avant :** $120 \times 1,60 = 192 \text{ €}$. **Après :** $120 \times 1,88 = 225,60 \text{ €}$.

La hausse vaut $225,60 - 192 = 33,60 \text{ €}$ par mois.

c) Pour garder 192 € au nouveau prix, il faudrait consommer

$$\frac{192}{1,88} \approx 102,1 \text{ L}$$

soit une baisse de $\frac{120 - 102,1}{120} \times 100 \approx 14,9\%$.

Pourquoi 14,9% et non 17,5%. Annuler une hausse de 17,5% demande une baisse plus faible en taux, parce qu'elle s'applique à une base différente. On le vérifie par les coefficients :

$$1,175 \times 0,851 \approx 1$$

Le contrôle : $102,1 \times 1,88 \approx 192 \text{ €}$ ✓

Réponse. a) +17,5% — b) +33,60 € — c) environ -14,9%.

Correction de l'exercice 10 - Le plan du collège

a) On multiplie par 400 :

$$9 \times 400 = 3600 \text{ cm} = 36 \text{ m} \quad 6 \times 400 = 2400 \text{ cm} = 24 \text{ m}$$

b) $36 \times 24 = 864 \text{ m}^2$.

c) $\frac{864}{480} = 1,8 \text{ m}^2 \text{ par élève}$.

Le contrôle par le rapport des aires. L'aire sur le plan vaut $9 \times 6 = 54 \text{ cm}^2$. L'aire réelle en centimètres carrés vaut $864 \text{ m}^2 = 8\,640\,000 \text{ cm}^2$, et

$$\frac{8\,640\,000}{54} = 160\,000 = 400^2$$

✓ conforme à la règle des aires.

Le contrôle de vraisemblance. $1,8 \text{ m}^2$ par élève est un ordre de grandeur réaliste pour une cour de collège ✓ Trouver 18 m^2 ou $0,18 \text{ m}^2$ aurait signalé une erreur de conversion.

Réponse. a) 36 m sur 24 m — b) 864 m^2 — c) $1,8 \text{ m}^2$ par élève.

Correction de l'exercice 11 - Les deux banques

a) **La banque B** : son coût s'écrit $0,90n$, de la forme $y = kx$. La banque A, avec ses 3 € fixes, s'écrit $3 + 0,40n$.

b) **Banque A** : $3 + 0,40 \times 10 = 3 + 4 = 7 \text{ €}$.

Banque B : $0,90 \times 10 = 9 \text{ €}$.

c) On résout l'égalité :

$$3 + 0,40n = 0,90n \Rightarrow 3 = 0,50n \Rightarrow n = 6$$

À partir de 7 **opérations**, la banque A est moins chère ; en dessous, c'est B.

Vérification : pour $n = 6$, les deux coûtent 5,40 € ✓ Pour $n = 7$: A donne 5,80 € et B donne 6,30 €.

Ce que l'exercice rappelle. Le tarif proportionnel n'est pas systématiquement le meilleur : il gagne sur les petits volumes, où les frais fixes de l'autre pèsent lourd, et perd sur les gros.

Réponse. a) la banque B — b) 7 € et 9 € — c) à partir de 7 opérations.

Correction de l'exercice 12 - Le mélange de café

a) $3 \times 22 = 66 \text{ €}$ et $5 \times 14 = 70 \text{ €}$, soit un total de 136 € pour 8 kg.

b) Le prix au kilo du mélange vaut

$$\frac{136}{8} = 17 \text{ € le kilo}$$

c) **Non.** La moyenne simple de 22 et 14 vaut 18 €. Le prix réel est plus bas, à 17 €, parce que le mélange contient **plus** de café bon marché (5 kg) que de café cher (3 kg).

La règle. Le prix d'un mélange est une **moyenne pondérée** : chaque prix compte à proportion de la quantité correspondante.

$$\text{prix} = \frac{3 \times 22 + 5 \times 14}{3 + 5}$$

Le contrôle de position. Le résultat doit être compris entre 14 et 22, et plus proche de 14 puisque ce café est majoritaire : 17 convient ✓ C'est la même mécanique que la vitesse moyenne de la plaquette précédente.

Réponse. a) 136 € — b) 17 € le kilo — c) non, moyenne pondérée par les quantités.

Correction de l'exercice 13 - L'ombre du bâtiment

a) Les rayons du soleil arrivent tous avec la **même inclinaison** au même instant. Chaque objet et son ombre forment donc des triangles rectangles de même forme : les rapports hauteur/ombre sont égaux, ce qui est exactement la proportionnalité.

b) Le coefficient vaut $\frac{1,5}{2,4} = 0,625$. La hauteur du bâtiment est donc

$$36 \times 0,625 = 22,5 \text{ m}$$

Par les produits en croix : $\frac{1,5}{2,4} = \frac{h}{36}$, donc $2,4h = 54$ et $h = 22,5 \text{ m} \checkmark$

c) On divise par le coefficient :

$$\frac{9}{0,625} = 14,4 \text{ m d'ombre}$$

Le contrôle de bon sens. L'ombre est plus longue que l'objet ($2,4 > 1,5$), donc l'arbre de 9 m doit avoir une ombre de plus de 9 m $\checkmark$ Ce principe est celui qu'utilisait Thalès pour mesurer la pyramide de Khéops.

Réponse. b) 22,5 m — c) 14,4 m d'ombre.

Correction de l'exercice 14 - La remise sur la facture

a) $850 \times 0,88 = 748 \text{ €}$.

b) $748 \times 1,20 = 897,60 \text{ €}$.

c) Le coefficient global est le produit des deux :

$$0,88 \times 1,20 = 1,056$$

Vérification : $850 \times 1,056 = 897,60 \text{ €} \checkmark$

La lecture du résultat. Le client paie 5,6% de plus que le montant hors taxes initial : la TVA de 20% l'emporte sur la remise de 12%, mais pas de 8 points — parce que les deux ne portent pas sur la même base.

L'ordre est indifférent. Appliquer d'abord la TVA puis la remise donnerait $850 \times 1,20 \times 0,88 = 897,60 \text{ €}$: un produit ne dépend pas de l'ordre de ses facteurs. C'est pourquoi les coefficients multiplicateurs sont l'outil adapté.

Réponse. a) 748 € HT — b) 897,60 € TTC — c) $\times 1,056$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : la boulangerie

a) $240 \times 1,20 = 288 \text{ €}$ par jour.

b) **Nouveau prix :** $1,20 \times 1,10 = 1,32 \text{ €}$.

Nouvelles ventes : $240 \times 0,95 = 228$ baguettes.

c) $228 \times 1,32 = 300,96 \text{ €}$.

d) **Oui.** La recette augmente de $300,96 - 288 = 12,96 \text{ €}$, soit

$$\frac{12,96}{288} \times 100 = 4,5\%$$

Le chemin direct. La recette est le produit prix $\times$ quantité, donc son coefficient est le produit des deux coefficients :

$$1,10 \times 0,95 = 1,045$$

soit +4,5% $\checkmark$ sans calculer aucune des deux valeurs intermédiaires.

Le bilan de la plaquette. Les coefficients multiplicateurs se composent quelle que soit la grandeur concernée — prix, quantité, ou leur produit. C’est ce qui permet de répondre à la question d) en une seule multiplication, là où le calcul détaillé en demandait quatre.

Réponse. a) 288 € — b) 1,32 € et 228 baguettes — c) 300,96 € — d) oui, +4,5%.