

Plaquette 1 - Écrire et calculer une puissance

Puissances — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. Pour un nombre relatif a et un entier $n \geq 1$:

$$a^n = a \times a \times \dots \times a \quad (n \text{ facteurs})$$

On lit « a exposant n » ou « a puissance n ». Le nombre a est la **base**, n est l'**exposant**.

Cas particuliers (pour $a \neq 0$) :

$$a^1 = a \quad a^0 = 1 \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Vocabulaire. a^2 se lit « a au carré », a^3 « a au cube ».

Le signe d'une puissance.

Base	Exposant pair	Exposant impair
positive	positif	positif
négative	positif	négatif

Exemple : $(-2)^4 = 16$ mais $(-2)^3 = -8$.

Le piège des parenthèses. Sans parenthèses, l'exposant ne porte que sur le nombre, pas sur le signe :

$$(-3)^2 = 9 \quad \text{alors que} \quad -3^2 = -9$$

Priorités de calcul. On calcule d'abord les puissances, puis les multiplications et divisions, puis les additions et soustractions. Les parenthèses passent avant tout.

Carrés à connaître. $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, $7^2 = 49$, $8^2 = 64$, $9^2 = 81$, $10^2 = 100$, $11^2 = 121$, $12^2 = 144$.

Puissances de 2 utiles en informatique. $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$, $2^7 = 128$, $2^8 = 256$, $2^{10} = 1024$.

Correction de l'exercice 1 - De la multiplication à la puissance

On compte le nombre de facteurs identiques : c'est l'exposant.

$$a^n = a \times a \times \dots \times a \quad (n \text{ facteurs})$$

a) Trois facteurs égaux à 5 : $5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$.

b) Deux facteurs égaux à 7 : $7 \times 7 = 7^2 = 49$.

c) Six facteurs égaux à 2 : 2^6 . On calcule de proche en proche : $2 \times 2 = 4$, $\times 2 = 8$, $\times 2 = 16$, $\times 2 = 32$, $\times 2 = 64$. Donc $2^6 = 64$.

d) Quatre facteurs égaux à 10 : $10^4 = 10\,000$.

L'erreur à éviter. 5^3 ne vaut pas 15 : l'exposant ne se multiplie pas à la base, il **compte** les facteurs.

Réponse. a) $5^3 = 125$ — b) $7^2 = 49$ — c) $2^6 = 64$ — d) $10^4 = 10\,000$.

Correction de l'exercice 2 - De la puissance au produit

On écrit autant de facteurs que l'indique l'exposant.

a) $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$. En calculant : $9 \times 3 = 27$, puis $27 \times 3 = 81$. Donc $3^4 = 81$.

b) $6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 36 \times 6 = 216$.

c) $1^{12} = 1 \times 1 \times \dots \times 1$ (12 facteurs) = 1.

d) $9^2 = 9 \times 9 = 81$.

Remarque sur c). 1 élevé à n'importe quelle puissance vaut toujours 1 : multiplier par 1 ne change rien, quel que soit le nombre de fois.

Coïncidence à ne pas retenir de travers. 3^4 et 9^2 valent tous deux 81, mais c'est un cas particulier, pas une règle.

Réponse. a) 81 — b) 216 — c) 1 — d) 81.

Correction de l'exercice 3 - Le piège des parenthèses

Sans parenthèses, l'exposant ne porte **que sur le nombre**, et le signe moins s'applique après.

a) $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$: le produit de deux nombres négatifs est positif.

Alors que $-3^2 = -(3 \times 3) = -9$.

$$(-3)^2 = 9 \quad \text{et} \quad -3^2 = -9$$

Les deux résultats sont **opposés**.

b) $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = 4 \times (-2) = -8$.

Et $-2^3 = -(2 \times 2 \times 2) = -8$.

Ici, les deux écritures donnent le **même** résultat.

c) Les deux écritures coïncident lorsque l'exposant est **impair** : la puissance d'un nombre négatif est alors négative, ce qui revient au même que de mettre le signe moins devant. Avec un exposant **pair**, elles diffèrent toujours (l'une est positive, l'autre négative).

Réponse. a) 9 et -9 — b) -8 dans les deux cas — c) quand l'exposant est impair.

Correction de l'exercice 4 - Prévoir le signe

La règle vient du produit des signes : deux facteurs négatifs donnent un produit positif, donc les signes s'annulent **deux par deux**.

base négative: exposant pair $\Rightarrow$ positif exposant impair $\Rightarrow$ négatif

a) L'exposant 6 est pair : $(-5)^6$ est **positif**.

b) L'exposant 7 est impair : $(-4)^7$ est **négatif**.

c) 100 est pair : $(-1)^{100}$ est **positif**, et vaut même exactement 1.

d) 101 est impair : $(-1)^{101}$ est **négatif**, et vaut -1.

À quoi ça sert. Prévoir le signe avant de calculer permet de repérer immédiatement une erreur de calculatrice ou de recopiage.

Réponse. a) positif — b) négatif — c) positif (= 1) — d) négatif (= -1).

Correction de l'exercice 5 - Exposant 0 et exposant 1

On applique les deux cas particuliers du cours, valables pour tout nombre a non nul :

$$a^1 = a \quad a^0 = 1$$

a) $8^1 = 8$: un seul facteur, c'est le nombre lui-même.

b) $8^0 = 1$.

c) $(-12)^0 = 1$: la règle vaut aussi pour une base négative, le résultat est 1 et non -1 .

d) $(-12)^1 = -12$.

Pourquoi $a^0 = 1$? Parce que passer de a^2 à a^1 , c'est diviser par a ; en continuant, $a^1 \div a = a^0$, et $a \div a = 1$. La règle prolonge donc naturellement le calcul.

Réponse. a) 8 — b) 1 — c) 1 — d) -12 .

Correction de l'exercice 6 - Les exposants négatifs

Un exposant négatif signifie « l'inverse de la puissance » :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

a) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$.

b) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0,04$.

c) $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$.

d) $(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4} = 0,25$. L'exposant 2 étant pair, le résultat est positif.

Le piège du signe. Un exposant négatif ne rend **pas** le résultat négatif : 2^{-3} vaut 0,125, un nombre positif. Le signe moins porte sur l'exposant, pas sur le nombre.

Réponse. a) 0,125 — b) 0,04 — c) 0,1 — d) 0,25.

Correction de l'exercice 7 - Repérer base et exposant

Dans l'écriture a^n , la **base** a est le nombre écrit en grand, l'**exposant** n est le petit nombre en haut à droite.

a) Base 4, exposant 3 : $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$.

b) Base 3, exposant 4 : $3^4 = 81$.

c) Base -6 (les parenthèses en font partie), exposant 2 : $(-6)^2 = 36$.

d) Base 2, exposant -1 : $2^{-1} = \frac{1}{2} = 0,5$.

Comparaison a) et b). Même chiffres, résultats différents : $4^3 = 64$ et $3^4 = 81$. **L'ordre compte** — une puissance n'est pas commutative, contrairement à une multiplication.

Réponse. a) 64 — b) 81 — c) 36 — d) 0,5.

Correction de l'exercice 8 - Comparer sans calculatrice

On calcule chaque puissance séparément.

— $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$;

— $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$;

$$- 5^2 = 25 ;$$

$$- 4^2 = 16.$$

On range ensuite les résultats :

$$16 < 25 < 27 < 32$$

L'ordre croissant est donc :

$$- 4^2 < 5^2 < 3^3 < 2^5.$$

Ce que montre l'exercice. On ne peut pas comparer deux puissances en regardant seulement la base ou seulement l'exposant : 2^5 dépasse 5^2 alors que sa base est plus petite. Il faut calculer.

Réponse. $4^2 < 5^2 < 3^3 < 2^5$.

Correction de l'exercice 9 - Avec les priorités

Ordre des priorités : **parenthèses**, puis **puissances**, puis multiplications et divisions, puis additions et soustractions.

a) La puissance d'abord : $2^4 = 16$, puis $3 + 16 = 19$.

b) La puissance d'abord : $2^3 = 8$, puis $5 \times 8 = 40$.

c) La parenthèse d'abord : $3 + 2 = 5$, puis $5^2 = 25$.

d) Chaque puissance séparément : $3^2 = 9$ et $2^2 = 4$, puis $9 + 4 = 13$.

Comparer c) et d). $(3 + 2)^2 = 25$ alors que $3^2 + 2^2 = 13$: on **ne peut pas** distribuer une puissance sur une somme. C'est l'erreur la plus fréquente du chapitre.

Réponse. a) 19 — b) 40 — c) 25 — d) 13.

Correction de l'exercice 10 - Corriger un calcul faux

L'élève a **multiplié** la base par l'exposant. Or l'exposant ne se multiplie pas : il **compte le nombre de facteurs**.

$$4^3 = 4 \times 4 \times 4$$

$$- 4 \times 4 = 16, \text{ puis } 16 \times 4 = 64.$$

Le bon résultat est $4^3 = 64$, et non 12.

Phrase à retenir. « L'exposant dit **combien de fois** on écrit le nombre, pas par combien on le multiplie. »

Un seul cas où l'erreur passe inaperçue. $2^2 = 4$ et $2 \times 2 = 4$: c'est la seule coïncidence, et elle entretient la confusion.

Réponse. $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$, et non 12.

Correction de l'exercice 11 - Vrai ou faux

a) **Faux.** L'exposant 4 est pair, donc le résultat est positif : $(-2)^4 = 16$. Le calcul : $(-2) \times (-2) = 4$, $4 \times (-2) = -8$, $-8 \times (-2) = 16$.

b) **Faux.** Tout nombre non nul élevé à la puissance 0 vaut 1 : $7^0 = 1$.

c) **Vrai.** Par définition de l'exposant négatif :

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

d) **Faux.** $(2 + 3)^2 = 5^2 = 25$, alors que $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$. Une puissance ne se distribue pas sur une somme.

Le seul cas où d) marcherait. Jamais, sauf si l'un des deux nombres est nul. C'est une règle à ne pas inventer.

Réponse. a) faux (16) — b) faux (1) — c) vrai — d) faux ($25 \neq 13$).

Correction de l'exercice 12 - Les puissances de 2

a) On calcule de proche en proche, chaque puissance étant le double de la précédente :

— $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$;

— $2^7 = 128$;

— $2^8 = 256$;

— $2^9 = 512$ et $2^{10} = 1024$.

b) D'après le calcul précédent :

$$256 = 2^8$$

Un octet est composé de 8 chiffres binaires, et chacun ayant deux valeurs possibles, cela fait bien $2^8 = 256$ combinaisons.

Le repère à retenir. $2^{10} = 1024$, soit « environ mille » : c'est pourquoi un kilo-octet vaut 1024 octets et non 1000.

Réponse. a) 128, 256 et 1024 — b) $256 = 2^8$.

Correction de l'exercice 13 - Une somme de puissances

On calcule d'abord chaque puissance, puis on effectue les additions et soustractions de gauche à droite.

Les puissances.

— $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$;

— $3^2 = 3 \times 3 = 9$;

— $4^0 = 1$ (tout nombre non nul à la puissance zéro vaut 1).

L'expression devient :

$$2^3 + 3^2 - 4^0 = 8 + 9 - 1$$

— $8 + 9 = 17$

— $17 - 1 = 16$

Le résultat est 16.

Le piège. Écrire $4^0 = 0$ donnerait 17 : c'est l'erreur la plus fréquente sur ce type d'expression.

Réponse. 16.

Correction de l'exercice 14 - Retrouver l'exposant

On essaie les exposants successifs jusqu'à retrouver le résultat.

a) $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$. Donc l'exposant est 5.

b) $5^1 = 5$, $5^2 = 25$, $5^3 = 125$. L'exposant est 3.

c) 0,01 vaut $\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$, donc

$$0,01 = 10^{-2}$$

L'exposant est -2 .

d) Tout nombre non nul élevé à la puissance 0 vaut 1 : l'exposant est 0.

Méthode pour c). Un résultat **inférieur à 1** signale toujours un exposant **négatif** : c'est le premier réflexe avant de chercher sa valeur.

Réponse. a) 5 — b) 3 — c) -2 — d) 0.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : huit calculs

a) $2^6 = 64$ (six facteurs 2) et $6^2 = 36$. Les deux écritures ne sont pas interchangeables.

b) $(-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5) = 25 \times (-5) = -125$. Et $-5^3 = -(5^3) = -125$: l'exposant étant impair, les deux coïncident.

c) $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} = 0,0625$, tandis que $(-4)^2 = 16$. Un exposant négatif donne un nombre plus petit que 1 ; une base négative avec exposant pair donne un nombre positif.

d) $10^0 = 1$; quant à 0^{10} , c'est $0 \times 0 \times \dots \times 0 = 0$.

Ce que montre d). La règle « exposant 0 donne 1 » porte sur l'**exposant**, pas sur la base. Une base nulle donne toujours 0 (sauf pour l'exposant 0, cas que l'on ne rencontre pas au collège).

Réponse. a) 64 et 36 — b) -125 et -125 — c) 0,0625 et 16 — d) 1 et 0.