

Plaquette 2 – Les puissances de 10

Puissances – Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Exposant positif. Pour $n \geq 1$:

$$10^n = 10 \dots 0 \quad (n \text{ zéros après le } 1)$$

Exemples : $10^3 = 1000$, $10^6 = 1\,000\,000$.

Exposant négatif.

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = 0,0 \dots 01 \quad (n - 1 \text{ zéros avant le } 1)$$

Exemples : $10^{-2} = 0,01$, $10^{-4} = 0,0001$.

Cas particuliers : $10^1 = 10$ et $10^0 = 1$.

Multiplier par une puissance de 10.

Opération	Effet sur la virgule
$\times 10^n$ ($n > 0$)	la virgule se déplace de n rangs vers la droite
$\times 10^{-n}$	la virgule se déplace de n rangs vers la gauche

Préfixes du système international.

Préfixe	kilo	méga	giga	téra	milli	micro	nano
Symbole	k	M	G	T	m	μ	n
Puissance	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}

Comparer deux puissances de 10. La plus grande est celle qui a le plus grand exposant — y compris avec des exposants négatifs : $10^{-2} > 10^{-5}$.

Contrôle de bon sens. Un exposant positif donne un nombre **supérieur à 1** ; un exposant négatif donne un nombre **compris entre 0 et 1**.

Correction de l'exercice 1 – Écriture décimale

On applique la règle du cours : l'exposant compte les zéros.

$$10^n = 10 \dots 0 \quad (n \text{ zéros}) \quad 10^{-n} = 0,0 \dots 01 \quad (n - 1 \text{ zéros})$$

a) $10^4 = 10\,000$ (4 zéros après le 1).

b) $10^7 = 10\,000\,000$ (7 zéros).

c) $10^{-3} = 0,001$: le 1 est au troisième rang après la virgule.

d) $10^{-6} = 0,000001$: le 1 est au sixième rang après la virgule.

Le contrôle rapide. Pour un exposant négatif, il y a en tout n **chiffres** après la virgule, dont $n - 1$ zéros suivis d'un 1.

Réponse. a) 10 000 — b) 10 000 000 — c) 0,001 — d) 0,000001.

Correction de l'exercice 2 - Du décimal à la puissance

On compte les zéros, ou les rangs après la virgule.

- a) 1000 porte 3 zéros : $1000 = 10^3$.
- b) 1 000 000 000 porte 9 zéros : c'est 10^9 , soit un milliard.
- c) 0,1 a un seul chiffre après la virgule : $0,1 = 10^{-1}$.
- d) 0,00001 a cinq chiffres après la virgule : $0,00001 = 10^{-5}$.

Méthode pour les petits nombres. On compte les chiffres après la virgule **jusqu'au 1 compris** : ce nombre, précédé d'un signe moins, donne l'exposant.

Réponse. a) 10^3 — b) 10^9 — c) 10^{-1} — d) 10^{-5} .

Correction de l'exercice 3 - Multiplier par une puissance de 10

Multiplier par 10^n déplace la virgule de n rangs : vers la **droite** si $n > 0$, vers la **gauche** si $n < 0$.

- a) Trois rangs vers la droite : $3,5 \times 10^3 = 3500$.
- b) Deux rangs vers la gauche : $7,2 \times 10^{-2} = 0,072$.
- c) Quatre rangs vers la droite : $0,45 \times 10^4 = 4500$.
- d) Trois rangs vers la gauche : $650 \times 10^{-3} = 0,65$.

Le contrôle de vraisemblance. Multiplier par 10^3 rend le nombre **plus grand**, par 10^{-3} **plus petit**. Un résultat qui va dans le mauvais sens signale une virgule déplacée à l'envers.

Réponse. a) 3500 — b) 0,072 — c) 4500 — d) 0,65.

Correction de l'exercice 4 - Comparer des puissances de 10

Pour les puissances de 10, comparer les nombres revient à comparer les **exposants** : plus l'exposant est grand, plus le nombre est grand.

On range d'abord les exposants :

$$-5 < -2 < -1 < 0 < 3$$

D'où l'ordre croissant des nombres :

$$10^{-5} < 10^{-2} < 10^{-1} < 10^0 < 10^3.$$

Vérification par les écritures décimales.

$$10^{-5} = 0,00001 ; 10^{-2} = 0,01 ; 10^{-1} = 0,1 ; 10^0 = 1 ; 10^3 = 1000 \quad \checkmark$$

Le piège des négatifs. 10^{-5} est plus **petit** que 10^{-2} , car $-5 < -2$: on compare les exposants comme des nombres relatifs, pas leurs valeurs absolues.

Réponse. $10^{-5} < 10^{-2} < 10^{-1} < 10^0 < 10^3$.

Correction de l'exercice 5 - Les préfixes du système international

Chaque préfixe correspond à une puissance de 10 du cours.

- a) « kilo » signifie 10^3 : $1 \text{ km} = 10^3 \text{ m} = 1000 \text{ m}$.
- b) « milli » signifie 10^{-3} : $1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m} = 0,001 \text{ m}$.
- c) « giga » signifie 10^9 : $1 \text{ Go} = 10^9 \text{ octets}$, soit un milliard d'octets.

d) « micro » signifie 10^{-6} : $1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$.

Le repère pour ne pas se tromper de sens. Un préfixe qui **agrandit** (kilo, méga, giga) correspond à un exposant **positif** ; un préfixe qui **rapetisse** (milli, micro, nano) correspond à un exposant **négatif**.

Réponse. a) 10^3 — b) 10^{-3} — c) 10^9 — d) 10^{-6} .

Correction de l'exercice 6 - Conversions d'unités

On remplace le préfixe par sa puissance de 10, puis on effectue le calcul.

a) $1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$, donc :

— $4,5 \text{ km} = 4,5 \times 10^3 \text{ m} = 4500 \text{ m}$.

b) $1 \text{ mg} = 10^{-3} \text{ g}$, donc :

— $230 \text{ mg} = 230 \times 10^{-3} \text{ g} = 0,23 \text{ g}$.

c) $0,003 \text{ km} = 0,003 \times 10^3 \text{ m} = 3 \text{ m}$.

Contrôle. Passer d'une grande unité à une petite (km vers m) donne un **plus grand nombre** ; l'inverse (mg vers g) donne un plus petit nombre. Les trois résultats respectent ce sens.

Réponse. a) 4500 m — b) 0,23 g — c) 3 m.

Correction de l'exercice 7 - Produits de puissances de 10

Quand on multiplie deux puissances de 10, les exposants **s'ajoutent** :

$$10^m \times 10^n = 10^{m+n}$$

a) $10^3 \times 10^4 = 10^{3+4} = 10^7$.

b) $10^{-2} \times 10^5 = 10^{-2+5} = 10^3$.

c) $10^6 \times 10^{-6} = 10^{6-6} = 10^0 = 1$.

d) $10^{-3} \times 10^{-4} = 10^{-3-4} = 10^{-7}$.

Pourquoi ça marche. $10^3 \times 10^4$, c'est 3 facteurs 10 suivis de 4 facteurs 10, soit 7 facteurs en tout.

Le résultat de c) en dit long. Multiplier par 10^6 puis par 10^{-6} ramène au point de départ : les deux opérations sont inverses l'une de l'autre.

Réponse. a) 10^7 — b) 10^3 — c) $10^0 = 1$ — d) 10^{-7} .

Correction de l'exercice 8 - Quotients de puissances de 10

Quand on divise deux puissances de 10, les exposants **se soustraient** :

$$\frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$$

a) $\frac{10^8}{10^3} = 10^{8-3} = 10^5$.

b) $\frac{10^2}{10^5} = 10^{2-5} = 10^{-3}$.

c) $\frac{10^{-4}}{10^{-7}} = 10^{-4-(-7)} = 10^{-4+7} = 10^3$.

Attention au c). Soustraire un nombre négatif revient à l'ajouter :

$-4 - (-7) = -4 + 7 = 3$. C'est là que se produisent la plupart des erreurs.

Contrôle de b). Le dénominateur est plus grand que le numérateur, donc le quotient est **inférieur à 1** : un exposant négatif est bien attendu ✓

Réponse. a) 10^5 — b) 10^{-3} — c) 10^3 .

Correction de l'exercice 9 - Une distance astronomique

a) On compte les zéros : 150 000 000 s'écrit 15 suivi de 7 zéros, ou 15×10^7 . En simplifiant davantage :

$$150\,000\,000 = 15 \times 10^7 = 1,5 \times 10^8$$

La distance vaut donc $1,5 \times 10^8$ km.

b) 1 km = 10^3 m, donc on multiplie par 10^3 :

$$— 1,5 \times 10^8 \times 10^3 = 1,5 \times 10^{8+3}$$

$$— \text{soit } 1,5 \times 10^{11} \text{ m.}$$

La distance Terre-Soleil vaut environ $1,5 \times 10^{11}$ m, c'est-à-dire 150 milliards de mètres.

Pourquoi cette écriture. Personne ne peut lire 150 000 000 000 d'un coup d'œil ; $1,5 \times 10^{11}$ se lit immédiatement et se compare sans compter les zéros.

Réponse. a) $1,5 \times 10^8$ km — b) $1,5 \times 10^{11}$ m.

Correction de l'exercice 10 - Une taille microscopique

a) On compte les rangs après la virgule pour ramener le premier chiffre non nul juste avant la virgule : il faut déplacer la virgule de 7 rangs vers la droite.

$$0,00000012 = 1,2 \times 10^{-7}$$

Le diamètre vaut $1,2 \times 10^{-7}$ m.

b) On cherche combien de fois 10^{-9} tient dans $1,2 \times 10^{-7}$:

$$— \frac{1,2 \times 10^{-7}}{10^{-9}} = 1,2 \times 10^{-7 - (-9)} = 1,2 \times 10^2 = 120$$

Le virus mesure environ 120 nm de diamètre.

Ordre de grandeur à retenir. Les virus se mesurent en dizaines ou centaines de nanomètres — bien plus petits qu'une cellule (quelques micromètres).

Réponse. a) $1,2 \times 10^{-7}$ m — b) 120 nm.

Correction de l'exercice 11 - Repérer une erreur

L'élève a cru que le signe moins de l'exposant rendait le **nombre** négatif. Ce n'est pas le cas : un exposant négatif signifie qu'on prend l'**inverse**.

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001$$

La bonne valeur est 0,001, un nombre **positif** et **plus petit que 1**.

Le contrôle qui l'aurait alerté. Une puissance de 10 n'est jamais négative : 10 multiplié par lui-même, ou son inverse, reste toujours positif.

Phrase à retenir. « Exposant négatif $\Rightarrow$ nombre **petit**, jamais nombre **négatif**. »

Réponse. $10^{-3} = 0,001$, un nombre positif.

Correction de l'exercice 12 – Calculer une expression

On traite d'abord le numérateur, en ajoutant les exposants :

$$10^5 \times 10^{-2} = 10^{5-2} = 10^3$$

L'expression devient :

$$\frac{10^3}{10^{-4}}$$

On divise, donc on soustrait les exposants :

$$— 10^{3-(-4)} = 10^{3+4} = 10^7$$

Le résultat est 10^7 , c'est-à-dire 10 000 000.

Attention. $3 - (-4)$ vaut 7 et non -1 : soustraire un négatif, c'est ajouter. C'est le calcul qui décide du résultat final.

Réponse. 10^7 .

Correction de l'exercice 13 – Combien de fois plus grand ?

« Combien de fois plus grand » se traduit par une **division** :

$$\frac{1,4 \times 10^6}{1,3 \times 10^4}$$

On sépare les deux parties du calcul :

- les nombres : $1,4 \div 1,3 \approx 1,08$;
- les puissances : $\frac{10^6}{10^4} = 10^{6-4} = 10^2$.

Le quotient vaut donc environ :

$$— 1,08 \times 10^2 \approx 108$$

Le diamètre du Soleil est environ **cent fois** plus grand que celui de la Terre.

L'ordre de grandeur suffit. Pour ce type de comparaison, on retient « environ 100 fois » : le rapport exact (108) n'apporte rien de plus à la compréhension.

Réponse. Environ 100 fois plus grand.

Correction de l'exercice 14 – Un tableur de conversions

On traite les cases une par une.

Colonne 1. 0,0001 a 4 chiffres après la virgule, donc :

$$0,0001 = 10^{-4}$$

Colonne 2. $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0,01$.

Colonne 3. 100 000 porte 5 zéros, donc $100\,000 = 10^5$.

Colonne 4. $10^0 = 1$ (tout nombre non nul à la puissance zéro).

Tableau complété.

Écriture décimale	0,0001	0,01	100 000	1
Puissance de 10	10^{-4}	10^{-2}	10^5	10^0

Contrôle d'ensemble. Les exposants négatifs correspondent aux nombres plus petits que 1, les positifs aux nombres plus grands ✓

Réponse. 10^{-4} ; 0,01 ; 10^5 ; 1.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : six écritures

a) $10^{-4} = \frac{1}{10^4} = 0,0001$.

b) 0,000001 a 6 chiffres après la virgule : $0,000001 = 10^{-6}$.

c) On ajoute les exposants :

$$10^5 \times 10^{-8} = 10^{5-8} = 10^{-3}$$

soit 0,001.

d) On soustrait les exposants :

$$\frac{10^{-1}}{10^{-4}} = 10^{-1 - (-4)} = 10^3$$

soit 1000.

Le fil conducteur du chapitre. Produit $\Rightarrow$ on **ajoute** les exposants ; quotient $\Rightarrow$ on les **soustrait**. Et un exposant négatif signale toujours un nombre entre 0 et 1.

Réponse. a) 0,0001 — b) 10^{-6} — c) $10^{-3} = 0,001$ — d) $10^3 = 1000$.