

Plaquette 3 - Les règles de calcul sur les puissances

Puissances — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les quatre règles, pour a et b non nuls et m, n entiers relatifs :

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \times n} \quad (a \times b)^n = a^n \times b^n$$

Comment les retrouver. $a^2 \times a^3 = (a \times a) \times (a \times a \times a)$, soit 5 facteurs : on **ajoute** les exposants. Même raisonnement pour les trois autres.

Le tableau des confusions.

Écriture	Ce que ça vaut	Erreur fréquente
$a^m \times a^n$	a^{m+n}	$a^{m \times n}$
$(a^m)^n$	$a^{m \times n}$	a^{m+n}
$a^m + a^n$	rien de plus simple	a^{m+n}
$(a+b)^n$	rien de plus simple	$a^n + b^n$

Attention. Les règles ne s'appliquent que si la **base est la même** (pour les deux premières). $2^3 \times 5^3$ ne se simplifie pas en une puissance de 2 ni de 5 — mais se regroupe en $(2 \times 5)^3 = 10^3$ grâce à la quatrième règle.

Cas particuliers utiles : $a^0 = 1$ et $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Contrôle. On peut toujours vérifier une règle sur un petit exemple numérique : $2^2 \times 2^3 = 4 \times 8 = 32$ et $2^5 = 32$ ✓

Correction de l'exercice 1 - Produit de même base

La base est la même : on **ajoute** les exposants.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

a) $3^4 \times 3^2 = 3^{4+2} = 3^6$.

b) $5^{-3} \times 5^7 = 5^{-3+7} = 5^4$.

c) $2^6 \times 2^{-6} = 2^{6-6} = 2^0 = 1$.

d) $7^{-2} \times 7^{-5} = 7^{-2-5} = 7^{-7}$.

Vérification sur a). $3^4 = 81$ et $3^2 = 9$, donc $81 \times 9 = 729$. Et $3^6 = 729$ ✓

L'erreur classique. Multiplier les exposants au lieu de les ajouter donnerait 3^8 , soit 6561 : quatre fois trop grand.

Réponse. a) 3^6 — b) 5^4 — c) $2^0 = 1$ — d) 7^{-7} .

Correction de l'exercice 2 - Quotient de même base

La base est la même : on **soustrait** l'exposant du dénominateur à celui du numérateur.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

a) $\frac{4^9}{4^5} = 4^{9-5} = 4^4$.

b) $\frac{6^2}{6^7} = 6^{2-7} = 6^{-5}$.

c) $\frac{2^{-3}}{2^{-8}} = 2^{-3-(-8)} = 2^{-3+8} = 2^5$.

Contrôle de b). Le dénominateur est plus grand que le numérateur, donc le quotient est inférieur à 1 : un exposant négatif est bien attendu ✓

Le point délicat de c). $-3 - (-8)$ se calcule en **ajoutant** 8 : le résultat est 5, positif. Se tromper ici donnerait 2^{-11} , un nombre minuscule au lieu de 32.

Réponse. a) 4^4 — b) 6^{-5} — c) 2^5 .

Correction de l'exercice 3 - Puissance d'une puissance

Pour une puissance de puissance, les exposants se **multiplient** :

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

a) $(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12}$.

b) $(5^{-2})^3 = 5^{-2 \times 3} = 5^{-6}$.

c) On procède de l'intérieur vers l'extérieur :

— $(10^2)^3 = 10^{2 \times 3} = 10^6$;

— puis $(10^6)^2 = 10^{6 \times 2} = 10^{12}$.

Pourquoi on multiplie. $(2^3)^4$ signifie « 2^3 multiplié quatre fois par lui-même », soit 4 paquets de 3 facteurs : 12 facteurs en tout.

Ne pas confondre avec le produit. $2^3 \times 2^4 = 2^7$, mais $(2^3)^4 = 2^{12}$.

Réponse. a) 2^{12} — b) 5^{-6} — c) 10^{12} .

Correction de l'exercice 4 - Puissance d'un produit

La règle se lit dans les deux sens : on peut regrouper ou séparer.

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n$$

a) Les deux puissances ont le **même exposant** : on regroupe les bases.

— $2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3 = 10^3 = 1000$.

b) On peut d'abord effectuer la parenthèse : $4 \times 25 = 100$, donc

$(4 \times 25)^2 = 100^2 = 10\,000$.

Ou séparer : $4^2 \times 25^2 = 16 \times 625 = 10\,000$ ✓ Les deux chemins mènent au même résultat.

c) $2^5 \times 5^5 = (2 \times 5)^5 = 10^5 = 100\,000$.

Quand y penser. Dès que deux puissances ont le **même exposant** mais des bases différentes : c'est le seul cas où l'on peut les regrouper. Ici, le regroupement fait apparaître une puissance de 10, immédiate à calculer.

Réponse. a) $10^3 = 1000$ — b) $10\,000$ — c) $10^5 = 100\,000$.

Correction de l'exercice 5 - Choisir la bonne règle

- a) Produit de même base $\Rightarrow$ on **ajoute** : $7^3 \times 7^5 = 7^{3+5} = 7^8$.
b) Puissance de puissance $\Rightarrow$ on **multiplie** : $(7^3)^5 = 7^{3 \times 5} = 7^{15}$.
c) Quotient de même base $\Rightarrow$ on **soustrait** : $\frac{7^5}{7^3} = 7^{5-3} = 7^2 = 49$.
d) Même exposant, bases différentes $\Rightarrow$ on **regroupe les bases** :

$$7^3 \times 2^3 = (7 \times 2)^3 = 14^3$$

L'intérêt de l'exercice. Les quatre écritures se ressemblent beaucoup et donnent quatre résultats très différents : c'est la lecture attentive de l'écriture qui décide, pas le calcul.

Réponse. a) 7^8 — b) 7^{15} — c) 49 — d) 14^3 .

Correction de l'exercice 6 - Ce qui ne se simplifie pas

a) **Membre de gauche** : $2^3 = 8$ et $2^4 = 16$, donc $2^3 + 2^4 = 8 + 16 = 24$.

Membre de droite : $2^7 = 128$.

Or $24 \neq 128$: l'égalité est **fausse**.

b) Les règles du cours portent sur les **produits** et les **quotients** de puissances, jamais sur les sommes :

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad \text{mais} \quad a^m + a^n \text{ ne se simplifie pas}$$

L'élève a appliqué à une addition une règle valable pour une multiplication.

Ce qu'on peut faire quand même. On peut factoriser :

$$2^3 + 2^4 = 2^3 \times (1 + 2) = 8 \times 3 = 24 \quad \checkmark \quad \text{Mais le résultat n'est pas une puissance de 2.}$$

Réponse. a) 24 et 128 — b) les règles ne valent que pour les produits et quotients.

Correction de l'exercice 7 - Expressions à deux étages

On simplifie toujours le numérateur d'abord, puis on divise.

a) Numérateur : $3^7 \times 3^2 = 3^{7+2} = 3^9$. Puis :

$$\frac{3^9}{3^4} = 3^{9-4} = 3^5$$

b) Numérateur : $(2^3)^2 = 2^{3 \times 2} = 2^6$. Puis :

$$- \frac{2^6}{2^5} = 2^{6-5} = 2^1 = 2.$$

c) Numérateur : $5^{-2} \times 5^6 = 5^{-2+6} = 5^4$. Puis :

$$- \frac{5^4}{5^{-1}} = 5^{4-(-1)} = 5^{4+1} = 5^5.$$

La méthode générale. Une expression à plusieurs étages se traite **de l'intérieur vers l'extérieur** : puissances de puissances, puis produits, puis quotients.

Réponse. a) 3^5 — b) $2^1 = 2$ — c) 5^5 .

Correction de l'exercice 8 - Avec des bases différentes

On ne peut simplifier que des puissances de **même base**. On regroupe donc les 2 ensemble et les 3 ensemble :

$$\frac{2^5 \times 3^4}{2^3 \times 3^2} = \frac{2^5}{2^3} \times \frac{3^4}{3^2}$$

On applique la règle du quotient à chaque groupe :

$$- \frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4 ;$$

$$- \frac{3^4}{3^2} = 3^{4-2} = 3^2 = 9.$$

Le résultat est donc :

$$- 4 \times 9 = 36.$$

Le réflexe à installer. Deux bases différentes ne se mélangent jamais : on traite chaque base séparément, puis on multiplie les résultats.

Réponse. $2^2 \times 3^2 = 36$.

Correction de l'exercice 9 - Retrouver un exposant

On applique la règle correspondante, puis on résout.

a) Dans un produit, les exposants s'ajoutent :

$$5 + \dots = 9$$

— l'exposant manquant est $9 - 5 = 4$.

b) Dans un quotient, ils se soustraient :

— $\dots - 4 = 2$, donc l'exposant manquant est $2 + 4 = 6$.

c) Dans une puissance de puissance, ils se multiplient :

— $\dots \times 3 = 12$, donc l'exposant manquant est $12 \div 3 = 4$.

Contrôle. On remplace et on vérifie : $2^5 \times 2^4 = 2^9 \checkmark$; $\frac{3^6}{3^4} = 3^2 \checkmark$; $(5^4)^3 = 5^{12} \checkmark$

Réponse. a) 4 — b) 6 — c) 4.

Correction de l'exercice 10 - Une chaîne de règles

Numérateur. On commence par la puissance de puissance :

$$- (10^3)^4 = 10^{3 \times 4} = 10^{12} ;$$

$$- \text{puis } 10^{12} \times 10^{-5} = 10^{12-5} = 10^7.$$

Dénominateur.

$$- 10^2 \times 10^{-4} = 10^{2-4} = 10^{-2}.$$

Quotient final.

$$\frac{10^7}{10^{-2}} = 10^{7-(-2)} = 10^9$$

Le résultat est 10^9 , soit un milliard.

L'ordre des opérations. Puissances de puissances, puis produits, puis le quotient : en suivant cet ordre, aucune étape ne mélange deux règles.

Réponse. 10^9 .

Correction de l'exercice 11 - Vrai ou faux

a) **Faux.** Les exposants s'ajoutent : $a^3 \times a^2 = a^5$. Avec $a = 2$: $8 \times 4 = 32 = 2^5$, et non $2^6 = 64$.

b) **Vrai.** Les exposants se multiplient : $(a^2)^3 = a^{2 \times 3} = a^6$. Avec $a = 2$: $(4)^3 = 64 = 2^6$ ✓

c) **Vrai.** $\frac{a^7}{a^7} = a^{7-7} = a^0 = 1$ (pour $a \neq 0$). C'est logique : un nombre divisé par lui-même vaut 1.

d) **Faux.** La puissance porte sur **tout** le produit : $(2a)^3 = 2^3 \times a^3 = 8a^3$. Avec $a = 1$: $(2)^3 = 8$, alors que $2 \times 1^3 = 2$.

La leçon de d). Les parenthèses englobent le 2 : il est élevé au cube lui aussi. C'est la règle $(a \times b)^n = a^n \times b^n$.

Réponse. a) faux — b) vrai — c) vrai — d) faux.

Correction de l'exercice 12 - Calculer de deux façons

Première méthode : la règle du quotient.

$$\frac{4^5}{4^3} = 4^{5-3} = 4^2 = 16$$

Seconde méthode : le calcul direct.

$$— 4^5 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1024 ;$$

$$— 4^3 = 64 ;$$

$$— \frac{1024}{64} = 16.$$

Les deux méthodes donnent 16.

Pourquoi la règle est plus sûre. La seconde méthode demande de calculer 1024 et 64 sans erreur, puis de diviser. Avec des exposants plus grands (4^{20} par exemple), elle devient impraticable, alors que la règle reste immédiate.

Réponse. 16 par les deux méthodes.

Correction de l'exercice 13 - Simplifier une fraction de puissances

On sépare les bases :

$$\frac{2^{10} \times 3^5}{2^8 \times 3^7} = \frac{2^{10}}{2^8} \times \frac{3^5}{3^7}$$

On applique la règle du quotient à chacune :

$$— \frac{2^{10}}{2^8} = 2^{10-8} = 2^2 = 4 ;$$

$$— \frac{3^5}{3^7} = 3^{5-7} = 3^{-2} = \frac{1}{9}.$$

Le résultat est donc :

$$— 4 \times \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

Écriture finale. On peut laisser $2^2 \times 3^{-2}$, ou donner la fraction $\frac{4}{9}$ — cette dernière est plus lisible et c'est celle qu'on attend.

Contrôle. $\frac{4}{9} \approx 0,44$: le résultat est inférieur à 1, ce qui est cohérent puisque la puissance de 3 est plus grande au dénominateur.

Réponse. $\frac{4}{9}$.

Correction de l'exercice 14 - Un raisonnement à compléter

Partons d'un quotient de deux puissances **identiques**, par exemple $\frac{a^3}{a^3}$.

Premier point de vue : la règle du quotient.

$$\frac{a^3}{a^3} = a^{3-3} = a^0$$

Second point de vue : le bon sens. Un nombre non nul divisé par lui-même vaut 1 :

$$\frac{a^3}{a^3} = 1.$$

Les deux calculs portent sur la même expression, donc :

$$a^0 = 1$$

Pourquoi « a non nul ». Si $a = 0$, le quotient $\frac{0^3}{0^3}$ n'a pas de sens : on ne divise jamais par zéro. La règle est donc énoncée pour $a \neq 0$.

Ce que montre ce raisonnement. La convention $a^0 = 1$ n'est pas arbitraire : c'est la seule valeur qui rende les règles de calcul cohérentes entre elles.

Réponse. Car $\frac{a^3}{a^3}$ vaut à la fois a^0 et 1.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : six simplifications

a) Produit de même base, on ajoute :

$$6^7 \times 6^{-3} = 6^{7-3} = 6^4$$

b) Puissance de puissance, on multiplie :

$$(3^{-2})^{-4} = 3^{(-2) \times (-4)} = 3^8 \text{ — le produit de deux négatifs est positif.}$$

c) Quotient de même base, on soustrait :

$$\frac{8^5}{8^{-2}} = 8^{5-(-2)} = 8^7.$$

d) Même exposant, bases différentes, on regroupe :

$$4^3 \times 25^3 = (4 \times 25)^3 = 100^3 = 10^6.$$

Bilan du chapitre. Produit $\Rightarrow$ addition des exposants. Quotient $\Rightarrow$ soustraction. Puissance de puissance $\Rightarrow$ multiplication. Même exposant $\Rightarrow$ regroupement des bases. Et jamais rien pour une somme.

Réponse. a) 6^4 — b) 3^8 — c) 8^7 — d) $100^3 = 10^6$.