

Plaquette 5 – Problèmes : très grand, très petit

Puissances — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Notation scientifique : $a \times 10^n$ avec $1 \leq a < 10$.

Calculer. On sépare toujours les nombres et les puissances :

$$(a \times 10^m) \times (b \times 10^n) = (a \times b) \times 10^{m+n}$$

$$\frac{a \times 10^m}{b \times 10^n} = \frac{a}{b} \times 10^{m-n}$$

puis on réajuste pour revenir entre 1 et 10.

Les conversions à connaître.

Grandeur	Conversion
longueur	1 km = 10^3 m ; 1 mm = 10^{-3} m ; 1 μ m = 10^{-6} m ; 1 nm = 10^{-9} m
masse	1 t = 10^3 kg ; 1 g = 10^{-3} kg ; 1 mg = 10^{-6} kg
informatique	1 ko = 10^3 o ; 1 Mo = 10^6 o ; 1 Go = 10^9 o ; 1 To = 10^{12} o
temps	1 min = 60 s ; 1 h = 3600 s ; 1 jour = 86 400 s

Méthode d'un problème.

- convertir toutes les grandeurs dans **la même unité** ;
- écrire chaque donnée en notation scientifique ;
- poser le calcul (produit ou quotient) ;
- réajuster le résultat, puis **conclure par une phrase** avec l'unité.

Ordres de grandeur repères.

Objet	Taille
atome	10^{-10} m
virus	10^{-7} m
cheveu (diamètre)	10^{-4} m
Terre (diamètre)	10^7 m
Terre-Soleil	10^{11} m

Contrôle final. Un résultat doit être vraisemblable : une distance de 10^{30} m ou une masse de 10^{-40} kg pour un objet courant signale une erreur d'exposant.

Correction de l'exercice 1 - Le disque dur

Conversion. 1 To = 10^{12} octets, donc :

- 2 To = 2×10^{12} octets.

Calcul. Le nombre de photos est le quotient de la capacité par la taille d'une photo :

$$\frac{2 \times 10^{12}}{4 \times 10^6}$$

Les nombres : $2 \div 4 = 0,5$.

Les puissances : $\frac{10^{12}}{10^6} = 10^{12-6} = 10^6$.

On obtient $0,5 \times 10^6$, qu'il faut réajuster :

$$— 0,5 \times 10^6 = 5 \times 10^{-1} \times 10^6 = 5 \times 10^5.$$

Le disque peut stocker 5×10^5 photos, soit 500 000 photos.

Contrôle de vraisemblance. Un demi-million de photos sur 2 To : c'est cohérent avec des photos de 4 Mo.

Réponse. 5×10^5 photos, soit 500 000.

Correction de l'exercice 2 - L'épaisseur d'une feuille

a) **Conversion.** $5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m} = 5 \times 10^{-2} \text{ m}$.

Calcul. L'épaisseur d'une feuille est l'épaisseur totale divisée par le nombre de feuilles :

$$\frac{5 \times 10^{-2}}{500}$$

On écrit $500 = 5 \times 10^2$:

— les nombres : $5 \div 5 = 1$;

— les puissances : $\frac{10^{-2}}{10^2} = 10^{-2-2} = 10^{-4}$.

L'épaisseur d'une feuille est $1 \times 10^{-4} \text{ m}$, soit 0,0001 m, c'est-à-dire 0,1 mm.

b) Le nombre placé devant est 1 : l'ordre de grandeur est 10^{-4} m .

Le repère. C'est le même ordre de grandeur que le diamètre d'un cheveu : une feuille de papier est aussi épaisse qu'un cheveu.

Réponse. a) $1 \times 10^{-4} \text{ m}$ — b) ordre de grandeur 10^{-4} m .

Correction de l'exercice 3 - Combien d'atomes ?

Conversion. $1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$.

Calcul. Le nombre d'atomes est la longueur totale divisée par le diamètre d'un atome :

$$\frac{10^{-3}}{10^{-10}} = 10^{-3-(-10)} = 10^{-3+10} = 10^7$$

Il faut 10^7 atomes, soit **dix millions** d'atomes pour couvrir un seul millimètre.

Le point de calcul à surveiller. $-3 - (-10) = -3 + 10 = 7$: soustraire un nombre négatif revient à l'ajouter. Une erreur ici donnerait 10^{-13} , un résultat absurde puisqu'on attend un nombre d'atomes très grand.

Ce que cela fait sentir. L'atome est si petit qu'il en faut dix millions pour faire un millimètre — d'où l'intérêt des puissances de 10 pour en parler.

Réponse. 10^7 atomes, soit dix millions.

Correction de l'exercice 4 - Une année-lumière

La distance parcourue est le produit de la vitesse par la durée :

$$(3 \times 10^8) \times (3,15 \times 10^7)$$

Les nombres : $3 \times 3,15 = 9,45$.

Les puissances : $10^8 \times 10^7 = 10^{8+7} = 10^{15}$.

Le résultat est :

$$— 9,45 \times 10^{15} \text{ m.}$$

Comme 9,45 est compris entre 1 et 10, c'est déjà une notation scientifique.

Une année-lumière vaut donc environ $9,45 \times 10^{15}$ m, soit près de dix mille milliards de kilomètres.

Ordre de grandeur. 9,45 étant proche de 10, l'ordre de grandeur est 10^{16} m.

Réponse. Environ $9,45 \times 10^{15}$ m.

Correction de l'exercice 5 - Comparer deux grandeurs

« Combien de fois plus » se traduit par une division :

$$\frac{7 \times 10^{-5}}{7 \times 10^{-6}}$$

Les nombres : $7 \div 7 = 1$.

Les puissances : $\frac{10^{-5}}{10^{-6}} = 10^{-5 - (-6)} = 10^{-5+6} = 10^1 = 10$.

Le cheveu est donc 10 **fois** plus épais qu'un globule rouge.

Lecture rapide. Quand les nombres placés devant sont identiques, il suffit de regarder l'écart entre les exposants : un écart de 1 signifie un rapport de 10, un écart de 3 un rapport de 1000.

Réponse. 10 fois plus épais.

Correction de l'exercice 6 - La population mondiale

La densité moyenne est le quotient de la population par la surface :

$$\frac{8 \times 10^9}{1,5 \times 10^8}$$

Les nombres : $8 \div 1,5 \approx 5,33$.

Les puissances : $\frac{10^9}{10^8} = 10^{9-8} = 10^1 = 10$.

Le résultat est :

$$— 5,33 \times 10 = 53,3$$

Il y a environ **53 habitants par km²** de terre émergée.

Contrôle de vraisemblance. La France compte environ 120 habitants par km², les déserts et les zones polaires presque aucun : une moyenne mondiale de 53 est crédible.

Réponse. Environ 53 habitants par km².

Correction de l'exercice 7 - Le débit d'internet

Conversion en bits. Le film pèse :

$$4 \times 10^9 \times 8 = 32 \times 10^9 = 3,2 \times 10^{10} \text{ bits}$$

Durée en secondes. On divise la taille par le débit :

— les nombres : $3,2 \div 5 = 0,64$;

— les puissances : $\frac{10^{10}}{10^7} = 10^3$.

Soit $0,64 \times 10^3 = 640$ secondes.

Conversion en minutes.

— $640 \div 60 \approx 10,7$

Le téléchargement dure environ 640 s, soit un peu moins de 11 minutes.

L'étape que l'on oublie. Les débits s'expriment en **bits** et les fichiers en **octets** : sans la multiplication par 8, on trouverait 80 secondes, huit fois trop peu.

Réponse. Environ 640 s, soit 10,7 minutes.

Correction de l'exercice 8 - Un grain de sable

Masse totale en kilogrammes. C'est le produit de la masse d'un grain par le nombre de grains :

$$(2 \times 10^{-5}) \times 10^{15}$$

— les nombres : 2 ;

— les puissances : $10^{-5} \times 10^{15} = 10^{-5+15} = 10^{10}$.

La masse totale est 2×10^{10} kg.

Conversion en tonnes. 1 t = 10^3 kg, donc on divise par 10^3 :

$$\frac{2 \times 10^{10}}{10^3} = 2 \times 10^{10-3} = 2 \times 10^7$$

La plage contient environ 2×10^7 tonnes de sable, soit **20 millions de tonnes**.

Contrôle. Une plage de quelques centaines de mètres pesant des millions de tonnes : c'est vraisemblable pour une masse de sable de plusieurs mètres d'épaisseur.

Réponse. 2×10^7 tonnes, soit 20 millions de tonnes.

Correction de l'exercice 9 - Un rapport d'échelle

On divise le diamètre de la Terre par celui de l'atome :

$$\frac{1,3 \times 10^7}{10^{-10}}$$

$$\text{Les puissances : } \frac{10^7}{10^{-10}} = 10^{7-(-10)} = 10^{7+10} = 10^{17}.$$

Le résultat est :

$$\text{— } 1,3 \times 10^{17}$$

La Terre est environ $1,3 \times 10^{17}$ fois plus grande qu'un atome.

Ordre de grandeur. 1,3 étant proche de 1, l'ordre de grandeur est 10^{17} .

Ce que cela signifie. Cent mille milliards de milliards : ce nombre n’a aucun sens intuitif, et c’est justement pourquoi on le donne sous forme de puissance de 10 — l’exposant, lui, se compare.

Réponse. Environ $1,3 \times 10^{17}$ fois, soit un ordre de grandeur de 10^{17} .

Correction de l’exercice 10 – Le budget d’un pays

On divise le budget total par le nombre d’habitants :

$$\frac{4,5 \times 10^{11}}{6,8 \times 10^7}$$

Les nombres : $4,5 \div 6,8 \approx 0,662$.

Les puissances : $\frac{10^{11}}{10^7} = 10^{11-7} = 10^4$.

On obtient :

— $0,662 \times 10^4 = 6620$

Cela représente environ **6620 euros par habitant**.

Réajustement en notation scientifique. $0,662 \times 10^4 = 6,62 \times 10^3$: les deux écritures sont justes, mais ici l’écriture décimale (6620 €) parle davantage.

Quand utiliser quelle écriture. La notation scientifique sert aux grandeurs extrêmes ; pour une somme que l’on peut se représenter, l’écriture décimale reste préférable.

Réponse. Environ 6620 € par habitant.

Correction de l’exercice 11 – Deux étapes de calcul

a) Une heure vaut 3600 s, soit $3,6 \times 10^3$ s. On multiplie :

$$(3 \times 10^9) \times (3,6 \times 10^3)$$

— les nombres : $3 \times 3,6 = 10,8$;

— les puissances : $10^9 \times 10^3 = 10^{12}$.

On obtient $10,8 \times 10^{12}$, à réajuster :

— $10,8 = 1,08 \times 10$, donc $1,08 \times 10^{13}$.

L’ordinateur effectue environ $1,08 \times 10^{13}$ opérations en une heure.

b) Une journée compte 24 heures :

— $1,08 \times 24 = 25,92$, donc $25,92 \times 10^{13}$;

— réajustement : $2,592 \times 10^{14}$.

Soit environ $2,6 \times 10^{14}$ opérations par jour.

Le réflexe du réajustement. Après chaque produit, on vérifie que le nombre de devant est bien entre 1 et 10 — c’est l’étape la plus souvent oubliée.

Réponse. a) $1,08 \times 10^{13}$ — b) environ $2,6 \times 10^{14}$.

Correction de l’exercice 12 – Repérer une erreur d’exposant

Le contrôle de vraisemblance d’abord. Un million de grains de riz devrait peser plusieurs kilogrammes, certainement pas 2×10^{-11} kg, qui est une masse minuscule (bien inférieure à celle d’un seul grain).

L'élève a **soustrait** les exposants au lieu de les ajouter : il a fait $-5 - 6 = -11$.

Le bon calcul. Il s'agit d'un produit, donc les exposants s'**ajoutent** :

$$(2 \times 10^{-5}) \times 10^6 = 2 \times 10^{-5+6} = 2 \times 10^1 = 20$$

Un million de grains de riz pèse 20 kg.

Ce que le contrôle aurait évité. Multiplier par 10^6 rend le résultat **plus grand**, jamais plus petit : l'exposant devait augmenter.

Réponse. Non : le bon résultat est 20 kg (les exposants s'ajoutent).

Correction de l'exercice 13 - Un volume

a) Le volume d'un pavé droit est le produit de ses trois dimensions :

$$V = L \times \ell \times h$$

$$— V = (2 \times 10^2) \times (1,5 \times 10^2) \times 10^2$$

Les nombres : $2 \times 1,5 = 3$.

Les puissances : $10^2 \times 10^2 \times 10^2 = 10^{2+2+2} = 10^6$.

Le volume vaut $3 \times 10^6 \text{ cm}^3$.

b) On divise par 10^3 :

$$— \frac{3 \times 10^6}{10^3} = 3 \times 10^{6-3} = 3 \times 10^3$$

Le volume vaut $3 \times 10^3 \text{ L}$, soit 3000 litres.

Contrôle par l'écriture décimale. La cuve mesure $200 \times 150 \times 100 \text{ cm}$, soit 3 000 000 cm^3 ✓ Et $3\,000\,000 \div 1000 = 3000 \text{ L}$ ✓

Réponse. a) $3 \times 10^6 \text{ cm}^3$ — b) $3 \times 10^3 \text{ L}$, soit 3000 litres.

Correction de l'exercice 14 - Estimer sans calculatrice

Pour estimer, on remplace chaque nombre par une valeur simple proche.

— 6,1 est proche de 6 ;

— 2,9 est proche de 3.

Le calcul devient :

$$\frac{6 \times 10^{12}}{3 \times 10^4}$$

— les nombres : $6 \div 3 = 2$;

— les puissances : $10^{12-4} = 10^8$.

Le résultat est d'environ 2×10^8 , dont l'ordre de grandeur est 10^8 .

Vérification à la calculatrice. $6,1 \div 2,9 \approx 2,10$, donc le résultat exact est environ $2,1 \times 10^8$: l'estimation était très proche.

À quoi ça sert. Estimer avant de calculer permet de repérer immédiatement une faute de frappe sur la calculatrice : un résultat en 10^{16} aurait sauté aux yeux.

Réponse. Environ 2×10^8 , ordre de grandeur 10^8 .

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : du plus petit au plus grand

Classement. On compare les exposants, en écrivant d'abord la taille humaine en notation scientifique : $1,7 = 1,7 \times 10^0$.

Les exposants sont -10 , -4 , 0 , 7 et 11 , d'où l'ordre croissant :

— atome (10^{-10} m) < feuille (10^{-4} m) < humain ($1,7$ m) < Terre ($1,3 \times 10^7$ m) < Terre-Soleil ($1,5 \times 10^{11}$ m).

Rapport entre les extrêmes. On divise la plus grande par la plus petite :

$$\frac{1,5 \times 10^{11}}{10^{-10}} = 1,5 \times 10^{11 - (-10)} = 1,5 \times 10^{21}$$

La distance Terre-Soleil est environ $1,5 \times 10^{21}$ fois plus grande que le diamètre d'un atome.

Ce que le chapitre permet. Sans les puissances de 10, il faudrait écrire un nombre de 22 chiffres pour exprimer ce rapport — et personne ne pourrait le lire.

Réponse. atome < feuille < humain < Terre < Terre-Soleil ; rapport $\approx 1,5 \times 10^{21}$.