

Plaquette 2 - La moyenne, simple et pondérée

Statistiques — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Moyenne d'une liste.

$$\bar{x} = \frac{\text{somme des valeurs}}{\text{nombre de valeurs}}$$

Moyenne pondérée — à partir d'un tableau d'effectifs :

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_px_p}{n_1 + n_2 + \dots + n_p}$$

Chaque valeur est multipliée par son effectif avant l'addition.

Moyenne avec des coefficients. Un contrôle coefficient 3 compte comme trois contrôles :

$$\bar{x} = \frac{\sum (\text{coefficient} \times \text{note})}{\sum \text{coefficients}}$$

Propriétés à connaître.

Propriété	Conséquence
la moyenne est entre le min et le max	contrôle immédiat du résultat
elle n'est pas forcément une valeur de la série	2,3 enfants par famille
elle est sensible aux valeurs extrêmes	un seul salaire élevé la tire vers le haut

Le total à partir de la moyenne.

$$\text{somme} = \bar{x} \times \text{effectif total}$$

C'est la clé de tous les problèmes de « note manquante » et de moyennes de groupes réunis.

Le contrôle obligatoire. Le résultat doit tomber entre la plus petite et la plus grande valeur de la série. Sinon, c'est une erreur.

Correction de l'exercice 1 - Moyenne d'une liste

La formule.

$$\bar{x} = \frac{\text{somme des valeurs}}{\text{nombre de valeurs}}$$

a) Somme : $12 + 15 + 9 + 14 + 10 = 60$, pour 5 valeurs.

$$\bar{x} = \frac{60}{5} = 12$$

b) Somme : $2,5 + 3,1 + 2,8 + 3,6 = 12$, pour 4 valeurs, donc $\bar{x} = 3$.

c) Somme : $-4 + 7 - 2 + 11 + 3 = 15$, pour 5 valeurs, donc $\bar{x} = 3$.

Le contrôle de position. En a), la moyenne 12 est bien comprise entre 9 et 15 ✓ En c), 3 est bien entre -4 et 11 ✓ Un résultat hors de cet intervalle signale une erreur d'addition ou de division.

La vigilance en c). Les valeurs négatives se soustraient dans la somme. Oublier un signe donnerait 23 au lieu de 15, soit une moyenne de 4,6.

Réponse. a) 12 — b) 3 — c) 3.

Correction de l'exercice 2 - Moyenne pondérée

La formule du cours.

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots}{n_1 + n_2 + \dots}$$

Effectif total : $4 + 6 + 10 + 7 + 3 = 30$ élèves.

Somme des notes, chaque note comptée autant de fois qu'elle apparaît :

$$4 \times 7 + 6 \times 10 + 10 \times 12 + 7 \times 15 + 3 \times 18$$

soit $28 + 60 + 120 + 105 + 54 = 367$.

Moyenne :

$$\bar{x} = \frac{367}{30} \approx 12,2$$

L'erreur à ne pas commettre. Calculer $\frac{7 + 10 + 12 + 15 + 18}{5} = 12,4$ reviendrait à supposer qu'une seule personne a eu chaque note. Ici la note 12 a été obtenue par 10 élèves : elle doit peser dix fois plus que la note 18, obtenue par trois élèves seulement.

Le contrôle de position. 12,2 est bien entre 7 et 18 ✓ et proche de 12, la note la plus fréquente, ce qui est cohérent.

Réponse. $\bar{x} = \frac{367}{30} \approx 12,2$.

Correction de l'exercice 3 - Les coefficients du bulletin

a) **La formule pondérée par les coefficients.**

$$\bar{x} = \frac{1 \times 14 + 3 \times 9 + 2 \times 13}{1 + 3 + 2} = \frac{14 + 27 + 26}{6} = \frac{67}{6} \approx 11,2$$

b) Sans coefficients :

$$\frac{14 + 9 + 13}{3} = \frac{36}{3} = 12$$

c) La moyenne pondérée est **plus basse** (11,2 contre 12) parce que la note la plus faible, 9, porte le plus fort coefficient : elle compte trois fois, alors que le 14 ne compte qu'une fois.

La règle générale. Un coefficient élevé sur une note faible tire la moyenne vers le bas, et inversement. C'est exactement le sens de la pondération : donner plus de poids à certaines évaluations.

Le contrôle de position. 11,2 est entre 9 et 14 ✓ et plus proche de 9 que la moyenne simple, ce qui est cohérent avec le coefficient 3.

Réponse. a) $\frac{67}{6} \approx 11,2$ — b) 12 — c) le 9 pèse coefficient 3.

Correction de l'exercice 4 - La note manquante

a) Somme : $11 + 14 + 8 + 13 = 46$, donc

$$\bar{x} = \frac{46}{4} = 11,5$$

b) Pour une moyenne de 12 sur cinq notes, la somme doit valoir

$$12 \times 5 = 60$$

Il manque donc $60 - 46 = 14$.

Vérification : $\frac{46 + 14}{5} = \frac{60}{5} = 12 \checkmark$

c) Pour 13 de moyenne, la somme doit valoir $13 \times 5 = 65$, donc il faut $65 - 46 = 19$.

La clé du raisonnement.

$$\text{somme} = \bar{x} \times \text{effectif}$$

On passe par la **somme visée**, et non par la moyenne directement : c'est ce qui rend le calcul immédiat.

La limite du procédé. Pour viser 14 de moyenne, il faudrait $70 - 46 = 24$: impossible sur 20. Une seule note ne rattrape qu'un écart limité.

Réponse. a) 11,5 — b) 14 — c) 19.

Correction de l'exercice 5 - L'erreur de Salim

a) La valeur 11 a été obtenue par 15 individus sur 20, soit les trois quarts de la population. La moyenne devrait donc être **proche de 11**, et certainement pas de 8.

b) **Le calcul correct.**

$$\bar{x} = \frac{2 \times 5 + 3 \times 8 + 15 \times 11}{2 + 3 + 15} = \frac{10 + 24 + 165}{20} = \frac{199}{20} = 9,95$$

c) **La règle oubliée :** dans un tableau d'effectifs, chaque valeur doit être multipliée par son effectif avant d'être additionnée, et on divise par l'**effectif total**, pas par le nombre de valeurs distinctes.

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i}$$

Le réflexe de contrôle. Avant tout calcul, repérer la valeur la plus fréquente : la moyenne doit être attirée vers elle. Ici 11 domine largement, la moyenne devait dépasser 9,5 $\checkmark$

Réponse. a) 11 concerne 15 individus sur 20 — b) $\bar{x} = 9,95$ — c) pondérer par les effectifs.

Correction de l'exercice 6 - Deux groupes réunis

a) **Premier groupe :** $13 \times 12 = 156$. **Second groupe :** $11 \times 18 = 198$.

$$\text{somme} = \bar{x} \times \text{effectif}$$

b) La moyenne d'ensemble est la somme totale divisée par l'effectif total :

$$\bar{x} = \frac{156 + 198}{30} = \frac{354}{30} = 11,8$$

c) La moyenne simple de 13 et 11 vaudrait 12, mais elle supposerait des groupes de **même taille**. Ici le second groupe est plus nombreux (18 contre 12) : sa moyenne de 11 pèse davantage, et la moyenne d'ensemble est tirée vers le bas.

La règle. La moyenne de deux groupes est une **moyenne pondérée par les effectifs** :

$$\bar{x} = \frac{12 \times 13 + 18 \times 11}{12 + 18}$$

Le contrôle de position. 11,8 est entre 11 et 13 $\checkmark$ et plus proche de 11, comme attendu.

Réponse. a) 156 et 198 — b) 11,8 — c) les groupes n'ont pas le même effectif.

Correction de l'exercice 7 - Les ventes de la semaine

a) Somme des six jours : $34 + 28 + 52 + 31 + 47 + 76 = 268$ articles.

$$\bar{x} = \frac{268}{6} \approx 44,7 \text{ articles par jour}$$

b) Les jours au-dessus de 44,7 sont mercredi (52), vendredi (47) et samedi (76) : **3 jours sur 6**.

c) Sans le samedi, la somme vaut $268 - 76 = 192$ pour 5 jours :

$$\frac{192}{5} = 38,4 \text{ articles}$$

La moyenne chute de plus de 6 articles.

Ce que l'exercice montre. Une seule valeur forte suffit à déplacer nettement la moyenne : le samedi, à lui seul, la fait passer de 38,4 à 44,7. C'est la **sensibilité aux valeurs extrêmes**, et c'est le principal défaut de la moyenne comme indicateur.

Le contrôle visuel. Trois barres sur six dépassent le niveau de 44,7 : le diagramme le confirme d'un coup d'œil ✓

Réponse. a) environ 44,7 articles — b) 3 jours — c) la moyenne tombe à 38,4.

Correction de l'exercice 8 - La moyenne des classes

Le principe. On ne connaît pas les tailles exactes : on les remplace par le **centre** de leur classe, ce qui donne une valeur approchée de la moyenne.

Les centres : 145, 155, 165 et 175 cm.

La moyenne pondérée :

$$\bar{x} = \frac{3 \times 145 + 8 \times 155 + 7 \times 165 + 2 \times 175}{20}$$

Numérateur : $435 + 1240 + 1155 + 350 = 3180$.

$$\bar{x} = \frac{3180}{20} = 159 \text{ cm}$$

Pourquoi c'est une approximation. Les trois élèves de la première classe mesurent peut-être 141, 143 et 149 cm, et non 145 chacun. En supposant qu'ils sont répartis autour du centre, les écarts se compensent en moyenne — mais le résultat reste approché.

Le contrôle de position. 159 cm est bien entre 140 et 180 ✓ et tombe dans la classe la plus fournie, [150; 160[, ce qui est cohérent.

Réponse. Taille moyenne d'environ 159 cm.

Correction de l'exercice 9 - Le prix moyen du mélange

a) $4 \times 16 = 64$ € et $6 \times 11 = 66$ €, soit 130 € pour 10 kg.

b) Le prix moyen est le coût total divisé par la masse totale :

$$\bar{x} = \frac{130}{10} = 13 \text{ € le kilo}$$

c) La moyenne simple de 16 et 11 vaut 13,5 € : c'est **plus** que le prix réel, parce que le produit le moins cher est majoritaire (6 kg contre 4 kg).

La formule sous-jacente, identique à celle des groupes réunis :

$$\bar{x} = \frac{4 \times 16 + 6 \times 11}{4 + 6}$$

Le contrôle de position. 13 € est entre 11 et 16 ✓ et plus proche de 11, comme le veut la répartition des masses.

Le lien avec la vitesse moyenne. C'est la même mécanique : une moyenne se pondère toujours par la grandeur qui « porte » les valeurs — masses ici, durées pour une vitesse, effectifs pour des notes.

Réponse. a) 130 € — b) 13 € le kilo — c) la moyenne simple vaudrait 13,50 €.

Correction de l'exercice 10 - Retrouver un effectif

a) Si n individus ont la valeur 5, alors $20 - n$ ont la valeur 9. La moyenne s'écrit

$$\frac{5n + 9(20 - n)}{20} = 7,4$$

b) On multiplie les deux membres par 20 :

$$5n + 180 - 9n = 148$$

soit $-4n + 180 = 148$, donc $-4n = -32$ et $n = 8$.

Il y a donc 8 **individus** à 5 et 12 à 9.

Vérification :

$$\frac{8 \times 5 + 12 \times 9}{20} = \frac{40 + 108}{20} = \frac{148}{20} = 7,4$$

soit bien la moyenne annoncée ✓

Le contrôle de bon sens. La moyenne 7,4 est plus proche de 9 que de 5 : la valeur 9 devait être majoritaire ✓ On pouvait le prévoir avant de résoudre, ce qui valide le résultat.

Réponse. a) $\frac{5n + 9(20 - n)}{20} = 7,4$ — b) 8 valeurs 5 et 12 valeurs 9.

Correction de l'exercice 11 - L'effet d'une valeur ajoutée

a) somme = $20 \times 9 = 180$.

b) La nouvelle somme vaut $180 + 30 = 210$, pour 10 valeurs :

$$\bar{x} = \frac{210}{10} = 21$$

La moyenne augmente de 1.

c) Pour que la moyenne reste 20 sur 10 valeurs, la somme doit valoir 200. Il faudrait donc ajouter

$$200 - 180 = 20$$

c'est-à-dire **la moyenne elle-même**.

La règle générale. Ajouter une valeur **égale à la moyenne** ne change pas la moyenne ; une valeur supérieure la fait monter, une valeur inférieure la fait descendre. C'est un contrôle utile : si l'on ajoute 30 à une série de moyenne 20, la nouvelle moyenne doit se situer strictement entre 20 et 30 ✓

Réponse. a) 180 — b) 21 — c) la valeur 20.

Correction de l'exercice 12 - Les températures de la semaine

a) Somme : $17 + 21 + 19 + 24 + 22 + 18 + 16 = 137$, pour 7 jours.

$$\bar{x} = \frac{137}{7} \approx 19,6 \text{ °C}$$

b) $e = 24 - 16 = 8$ °C.

c) Les températures supérieures à 19,6 sont 21, 24 et 22 : **3 jours** sur 7.

Ce que les deux indicateurs disent ensemble. La moyenne, 19,6 °C, situe la semaine ; l'étendue, 8 °C, dit que les écarts restent modérés. Une même moyenne avec une étendue de 25 °C décrirait une semaine bien plus contrastée.

La remarque sur la répartition. Trois jours au-dessus, quatre en dessous : la moyenne ne coupe pas nécessairement la série en deux parts égales. C'est la **médiane** qui a cette propriété, et c'est l'objet de la plaquette suivante.

Réponse. a) environ 19,6 °C — b) 8 °C — c) 3 jours.

Correction de l'exercice 13 - Le budget moyen

a) Somme : $380 + 420 + 350 + 460 + 400 + 1200 = 3210$ €.

$$\bar{x} = \frac{3210}{6} = 535 \text{ €}$$

b) Sans la sixième famille : somme 2010 € pour 5 familles, soit

$$\frac{2010}{5} = 402 \text{ €}$$

c) **Non, la moyenne est trompeuse.** Elle vaut 535 €, alors que **cinq familles sur six** dépensent moins de 460 € : la moyenne est supérieure à presque toutes les valeurs de la série.

La cause. Une seule valeur extrême, 1200 €, tire la moyenne vers le haut de plus de 130 €. C'est la limite structurelle de cet indicateur : il tient compte de toutes les valeurs, y compris de celles qui sont atypiques.

Ce qu'il faudrait utiliser. Un indicateur insensible aux extrêmes : la **médiane**, qui vaut ici 410 € et résume bien mieux la situation des familles.

Réponse. a) 535 € — b) 402 € — c) non, une valeur extrême fausse le résumé.

Correction de l'exercice 14 - La moyenne d'un mélange de groupes

a) On passe par les sommes :

$$120 \times 11,5 = 1380 \quad 80 \times 12,8 = 1024$$

$$\bar{x} = \frac{1380 + 1024}{200} = \frac{2404}{200} = 12,02$$

b) Elle est plus proche de 11,5, parce que les quatrièmes sont plus nombreux (120 contre 80) : leur moyenne pèse davantage dans le calcul.

c) 12,15 est exactement la moyenne simple de 11,5 et 12,8 :

$$\frac{11,5 + 12,8}{2} = 12,15$$

Il faudrait donc que les **deux groupes aient le même effectif**, par exemple 100 élèves chacun.

La règle à retenir. La moyenne de deux groupes est toujours comprise entre les deux moyennes, et d'autant plus proche de celle du groupe le plus nombreux. Elle ne coïncide avec la moyenne simple que si les effectifs sont égaux.

Réponse. a) 12,02 — b) proche de 11,5, groupe plus nombreux — c) des effectifs égaux.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : les résultats du trimestre

a) **La moyenne pondérée.**

$$\bar{x} = \frac{1 \times 13 + 2 \times 16 + 3 \times 9 + 2 \times 14}{1 + 2 + 3 + 2}$$

Numérateur : $13 + 32 + 27 + 28 = 100$. Somme des coefficients : 8.

$$\bar{x} = \frac{100}{8} = 12,5$$

b) Avec le cinquième contrôle, la somme des coefficients passe à 10. Pour une moyenne de 13, le total pondéré doit valoir $13 \times 10 = 130$. Il manque donc $130 - 100 = 30$ points pondérés, à répartir sur un coefficient 2 :

$$\frac{30}{2} = 15$$

Vérification : $\frac{100 + 2 \times 15}{10} = \frac{130}{10} = 13 \checkmark$

c) **Oui**, 15 est une note tout à fait atteignable — l'élève a déjà obtenu 16 et 14.

Le bilan de la plaquette. Tous ces problèmes passent par la même clé :
somme = $\bar{x} \times \text{effectif}$, où l'« effectif » est le nombre d'individus, ou la somme des coefficients.

Réponse. a) 12,5 — b) 15 — c) oui, c'est atteignable.