

Plaquette 3 - La médiane

Statistiques — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. La médiane est une valeur m telle qu'au moins la moitié des données sont inférieures ou égales à m , et au moins la moitié supérieures ou égales à m .

La méthode, en deux temps.

Étape	Geste
1	ranger les valeurs dans l'ordre croissant
2	repérer la valeur du milieu

Effectif impair. La médiane est la valeur de rang $\frac{n+1}{2}$.

$$n = 9 \Rightarrow \text{rang } 5$$

Effectif pair. On prend la demi-somme des deux valeurs centrales, de rangs $\frac{n}{2}$ et $\frac{n}{2} + 1$.

$$n = 10 \Rightarrow m = \frac{x_5 + x_6}{2}$$

Sur un tableau d'effectifs. On utilise les effectifs cumulés : la médiane est la valeur où le cumul atteint la moitié de l'effectif total.

Médiane et moyenne, deux indicateurs différents.

Indicateur	Sensible aux extrêmes ?	Toujours une valeur de la série ?
moyenne	oui	non
médiane	non	pas toujours (effectif pair)

Le contrôle. Compter les valeurs de part et d'autre de la médiane : elles doivent être en nombre égal.

Correction de l'exercice 1 - Effectif impair

La méthode. On range, puis on prend la valeur de rang $\frac{n+1}{2}$.

a) Série rangée : 3; 5; 7; 9; 11. Ici $n = 5$, donc le rang est $\frac{5+1}{2} = 3$:

$$m = 7$$

Contrôle : deux valeurs en dessous (3 et 5), deux au-dessus (9 et 11) ✓

b) Série rangée : 6; 8; 11; 14; 17; 19; 22. Ici $n = 7$, rang 4 : $m = 14$.

Contrôle : trois valeurs de chaque côté ✓

c) Série rangée : 1,8; 2,5; 3,4. Rang 2 : $m = 2,5$.

L'erreur la plus fréquente. Prendre la valeur du milieu **sans ranger** la série : en a), ce serait 9 au lieu de 7. Le rangement n'est pas une formalité, c'est la première moitié du travail.

Réponse. a) $m = 7$ — b) $m = 14$ — c) $m = 2,5$.

Correction de l'exercice 2 - Effectif pair

La règle. Pour un effectif pair, la médiane est la demi-somme des deux valeurs centrales :

$$m = \frac{x_{n/2} + x_{n/2+1}}{2}$$

a) Rangée : 9; 12; 15; 18. Ici $n = 4$, les valeurs centrales sont les 2^e et 3^e :

$$m = \frac{12 + 15}{2} = 13,5$$

b) Rangée : 3; 5; 8; 13; 17; 21. Ici $n = 6$, rangs 3 et 4 :

$$m = \frac{8 + 13}{2} = 10,5$$

c) Rangée : 97; 98; 99; 100; 101; 102; 103; 105. Ici $n = 8$, rangs 4 et 5 :

$$m = \frac{100 + 101}{2} = 100,5$$

Une remarque importante. La médiane n'est pas ici une valeur de la série : 13,5, 10,5 et 100,5 n'y figurent pas. C'est normal avec un effectif pair, et cela ne pose aucun problème.

Réponse. a) 13,5 — b) 10,5 — c) 100,5.

Correction de l'exercice 3 - Médiane sur un tableau

Effectif total : $3 + 6 + 9 + 5 + 2 = 25$ élèves. L'effectif est impair, donc la médiane est la note de rang

$$\frac{25 + 1}{2} = 13$$

Les effectifs cumulés :

Note	8	10	12	14	16
Cumulés	3	9	18	23	25

Le 13^e élève : le cumul atteint 9 à la note 10 et 18 à la note 12. Le rang 13 tombe donc dans le groupe des 12 :

$$m = 12$$

Le contrôle. Douze élèves ont une note inférieure ou égale à 10... non : neuf élèves ont au plus 10, et $25 - 18 = 7$ ont au moins 14. Le rang 13 est bien encadré par 9 et 18 ✓

Pourquoi les cumulés sont indispensables. Écrire les 25 notes une à une pour compter jusqu'à la treizième serait long et source d'erreur. Le tableau des cumulés répond en une lecture.

Réponse. $m = 12$ (le 13^e élève).

Correction de l'exercice 4 - Médiane et moyenne

a) Somme : $4 + 5 + 5 + 6 + 30 = 50$, pour 5 valeurs :

$$\bar{x} = \frac{50}{5} = 10$$

b) La série est déjà rangée, $n = 5$, rang 3 :

$$m = 5$$

c) **La médiane.** La moyenne vaut 10, alors que **quatre valeurs sur cinq** sont inférieures ou égales à 6 : elle ne représente aucune donnée de la série. La médiane, 5, se situe au cœur du groupe principal.

La cause de l'écart. La valeur 30 est très éloignée des autres. Elle pèse dans la somme — donc dans la moyenne — mais pas dans le comptage des rangs, donc pas dans la médiane.

La règle pratique. Quand une série comporte des valeurs aberrantes ou très dispersées (salaires, prix de l'immobilier), on privilégie la médiane. Quand elle est régulière, moyenne et médiane sont proches et l'une ou l'autre convient.

Réponse. a) $\bar{x} = 10$ — b) $m = 5$ — c) la médiane, insensible à la valeur 30.

Correction de l'exercice 5 - L'erreur de Wassim

a) Wassim a pris la troisième valeur de la liste **telle qu'elle est écrite**, sans la ranger. Or la médiane se définit sur la série **ordonnée** : la position dans l'énoncé n'a aucune signification statistique.

b) **Série rangée** : 4; 7; 12; 15; 19. Avec $n = 5$, le rang de la médiane est $\frac{5+1}{2} = 3$:

$$m = 12$$

c) Deux valeurs lui sont inférieures (4 et 7), et deux lui sont supérieures (15 et 19).

Le contrôle qui démasque l'erreur de Wassim. Avec $m = 19$, il y aurait quatre valeurs en dessous et aucune au-dessus : ce n'est pas un partage en deux moitiés. Vérifier l'équilibre de part et d'autre prend cinq secondes et détecte toujours l'oubli du rangement.

Réponse. a) il n'a pas rangé la série — b) $m = 12$ — c) deux valeurs.

Correction de l'exercice 6 - Les salaires de l'entreprise

a) Somme : $1500 + 1600 + 1550 + 1700 + 1650 + 1580 + 6000 = 15\,580$ €, pour 7 salariés :

$$\bar{x} = \frac{15\,580}{7} \approx 2225,7 \text{ €}$$

b) **Série rangée** : 1500; 1550; 1580; 1600; 1650; 1700; 6000. Avec $n = 7$, rang 4 :

$$m = 1600 \text{ €}$$

c) Le chiffre est **exact** mais **trompeur**. Six salariés sur sept gagnent moins de 1700 € : la moyenne est gonflée par le seul salaire de 6000 €. Le salaire médian, 1600 €, décrit bien mieux la situation réelle des salariés.

Pourquoi les statistiques officielles publient la médiane. Pour les revenus, les prix de l'immobilier ou les patrimoines, quelques valeurs très élevées tirent la moyenne vers le haut. Le « salaire médian » est l'indicateur retenu précisément parce qu'il résiste à ces valeurs extrêmes.

Réponse. a) environ 2226 € — b) 1600 € — c) exact mais trompeur, la médiane est bien plus représentative.

Correction de l'exercice 7 - Ajouter une valeur

a) La série est rangée, $n = 6$: la médiane est la demi-somme des 3^e et 4^e valeurs.

$$m = \frac{11 + 14}{2} = 12,5$$

b) Nouvelle série : 3; 8; 11; 14; 17; 20; 25, avec $n = 7$. Le rang est 4 :

$$m = 14$$

c) Nouvelle série : 3; 8; 11; 14; 20; 25; 1000, avec $n = 7$, rang 4 :

$$m = 14$$

La même médiane dans les deux cas. Que la septième valeur soit 17 ou 1000 ne change rien : elle se place après le rang médian, et seul son **rang** compte, pas sa valeur.

La comparaison avec la moyenne. En b), la moyenne passe de 13,5 à environ 14 ; en c), elle bondit à environ 154,4. C'est la démonstration la plus nette de la différence entre les deux indicateurs.

Réponse. a) 12,5 — b) 14 — c) 14 également.

Correction de l'exercice 8 - Les durées de trajet

a) **Effectif total** : 40, donc pair. La médiane est la demi-somme des 20^e et 21^e valeurs.

Cumuls : 6 ; 17 ; 30 ; 37 ; 40.

Les rangs 20 et 21 tombent tous deux entre 18 et 30, donc dans le groupe de la valeur 30 :

$$m = \frac{30 + 30}{2} = 30 \text{ minutes}$$

b) **Moyenne pondérée** :

$$\bar{x} = \frac{6 \times 10 + 11 \times 20 + 13 \times 30 + 7 \times 40 + 3 \times 50}{40}$$

Numérateur : $60 + 220 + 390 + 280 + 150 = 1100$, donc $\bar{x} = \frac{1100}{40} = 27,5 \text{ min.}$

c) La moyenne (27,5 min) est **inférieure** à la médiane (30 min) : la série compte davantage de petits trajets que de très longs, ce qui tire la moyenne vers le bas.

Ce que la comparaison révèle. Moyenne inférieure à la médiane signale une distribution étalée vers les petites valeurs ; l'inverse signale une queue vers les grandes valeurs, comme pour les salaires.

Réponse. a) $m = 30 \text{ min}$ — b) $\bar{x} = 27,5 \text{ min}$ — c) la moyenne est plus basse.

Correction de l'exercice 9 - Reconstituer une série

a) La série rangée s'écrit 7; a ; 12; b ; 20 avec $7 \leq a \leq 12 \leq b \leq 20$. Par exemple :

$$7; 10; 12; 15; 20$$

b) Pour une moyenne de 12, la somme doit valoir $12 \times 5 = 60$. Or $7 + 12 + 20 = 39$, donc il faut $a + b = 21$. C'est possible, par exemple avec $a = 8$ et $b = 13$:

$$7; 8; 12; 13; 20$$

Vérification : somme 60, moyenne 12, médiane 12 ✓

c) La moyenne est maximale quand a et b le sont : $a = 12$ et $b = 20$. La série 7; 12; 12; 20; 20 a pour somme 71, donc

$$\bar{x} = \frac{71}{5} = 14,2$$

Ce que l'exercice met en évidence. Médiane, minimum et maximum ne déterminent pas la série : beaucoup de séries différentes partagent ces trois valeurs, avec des moyennes allant de 11,4 à 14,2. Les indicateurs résument, ils ne reconstituent pas.

Réponse. a) par exemple 7; 10; 12; 15; 20 — b) oui, avec $a + b = 21$ — c) 14,2.

Correction de l'exercice 10 - Deux groupes de sportifs

a) Les deux séries sont rangées, $n = 5$, rang 3 :

$$m_A = 15 \quad m_B = 15$$

Les médianes sont **identiques**.

b) **Groupe A** : somme 75, donc $\bar{x}_A = 15$.

Groupe B : somme 80, donc $\bar{x}_B = 16$.

c) **Les étendues** : $e_A = 18 - 12 = 6$ s et $e_B = 24 - 11 = 13$ s. Le groupe **A** est nettement plus homogène.

Ce que les trois indicateurs disent ensemble. Même médiane, mais moyennes et étendues différentes : la valeur 24 du groupe B tire sa moyenne vers le haut et double son étendue. Un seul indicateur n'aurait rien montré ; les trois réunis décrivent la situation.

La conclusion pour un entraîneur. Le groupe A est régulier ; le groupe B compte un athlète nettement plus lent que les autres, ce que la médiane seule ne révélait pas.

Réponse. a) 15 pour les deux — b) 15 et 16 — c) le groupe A ($e = 6$ contre 13).

Correction de l'exercice 11 - Médiane d'un grand effectif

a) **Effectif total** : 60, pair. La médiane est la demi-somme des 30^e et 31^e valeurs.

Cumuls : 5 ; 14 ; 28 ; 44 ; 55 ; 60.

Le rang 30 dépasse 28 et n'atteint pas 44 : il tombe dans le groupe du score 3. Le rang 31 aussi. Donc

$$m = \frac{3+3}{2} = 3$$

b) Les scores strictement supérieurs à 3 sont 4 et 5 :

$$11 + 5 = 16 \text{ joueurs}$$

Le contrôle de la médiane. Les joueurs ayant au plus 3 sont 44, soit plus de la moitié de 60 ✓ et ceux ayant au moins 3 sont $60 - 28 = 32$, également plus de la moitié ✓ La définition est bien vérifiée des deux côtés.

Remarque. Ici 16 joueurs sont au-dessus et 28 en dessous : le partage n'est pas exactement moitié-moitié, parce que 16 joueurs ont exactement la valeur médiane. C'est fréquent avec des valeurs entières répétées.

Réponse. a) $m = 3$ — b) 16 joueurs.

Correction de l'exercice 12 - Le prix des logements

a) **Série rangée** : 138; 145; 149; 158; 162; 168; 175; 890. Avec $n = 8$, la médiane est la demi-somme des 4^e et 5^e :

$$m = \frac{158 + 162}{2} = 160 \text{ (milliers d'euros)}$$

b) Somme : $138 + 145 + 149 + 158 + 162 + 168 + 175 + 890 = 1985$, donc

$$\bar{x} = \frac{1985}{8} \approx 248,1$$

c) **La médiane.** Sept appartements sur huit valent moins de 180 milliers d'euros ; la moyenne de 248 est gonflée par le seul bien à 890, sans doute un logement d'exception. Un acheteur cherchant un appartement ordinaire doit se fier aux 160 mille euros

médians.

Ce que font les professionnels. Les annonces immobilières publient le « prix médian au mètre carré » du quartier, jamais la moyenne — exactement pour cette raison.

Réponse. a) 160 milliers d'euros — b) environ 248,1 — c) la médiane.

Correction de l'exercice 13 - Médiane, moyenne et étendue

a) **Moyenne** : somme $6 + 6 + 7 + 8 + 9 + 9 + 10 + 15 = 70$, donc $\bar{x} = \frac{70}{8} = 8,75$.

Médiane : $n = 8$, demi-somme des 4^e et 5^e valeurs :

$$m = \frac{8+9}{2} = 8,5$$

Étendue : $e = 15 - 6 = 9$.

b) Avec 50 à la place de 15 : la somme devient 105, donc

$$\bar{x} = \frac{105}{8} = 13,125$$

et l'étendue devient $e = 50 - 6 = 44$.

c) **La médiane reste** 8,5 : la valeur modifiée occupe toujours le dernier rang, et les 4^e et 5^e valeurs sont inchangées.

Le bilan des trois indicateurs. La moyenne bondit de 50%, l'étendue quintuple, la médiane ne bouge pas d'un dixième. C'est exactement ce qu'on attend : la médiane est un indicateur de **position robuste**, la moyenne et l'étendue sont sensibles aux extrêmes.

Réponse. a) 8,75 ; 8,5 ; 9 — b) moyenne 13,125, étendue 44 — c) la médiane.

Correction de l'exercice 14 - Les résultats de six élèves

a) **Série rangée** : 29; 35; 42; 57; 61; 68. Avec $n = 6$, la médiane est la demi-somme des 3^e et 4^e :

$$m = \frac{42+57}{2} = 49,5 \text{ points}$$

b) Somme : $29 + 35 + 42 + 57 + 61 + 68 = 292$, donc

$$\bar{x} = \frac{292}{6} \approx 48,7 \text{ points}$$

c) **Au-dessus de la médiane** : Diego, Emma et Bilal, soit 3 élèves — exactement la moitié, c'est la définition même de la médiane.

Au-dessus de la moyenne : les mêmes trois élèves, puisque 48,7 est très proche de 49,5.

Pourquoi les deux indicateurs coïncident presque ici. La série ne comporte pas de valeur aberrante : les six scores sont répartis assez régulièrement entre 29 et 68. Moyenne et médiane se rejoignent dans ce cas — leur écart est un bon indice de la régularité d'une série.

Réponse. a) 49,5 points — b) environ 48,7 points — c) 3 élèves dans les deux cas.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : les livres lus

a) **Effectif total** : $8 + 12 + 15 + 9 + 4 + 2 = 50$, pair. La médiane est la demi-somme des 25^e et 26^e valeurs.

Cumuls : 8 ; 20 ; 35 ; 44 ; 48 ; 50.

Les rangs 25 et 26 tombent entre 20 et 35, donc dans le groupe de la valeur 2 :

$$m = 2 \text{ livres}$$

b) **Moyenne pondérée :**

$$\bar{x} = \frac{8 \times 0 + 12 \times 1 + 15 \times 2 + 9 \times 3 + 4 \times 4 + 2 \times 6}{50}$$

Numérateur : $0 + 12 + 30 + 27 + 16 + 12 = 97$, donc $\bar{x} = \frac{97}{50} = 1,94$ livre.

c) $e = 6 - 0 = 6$ livres.

d) **En une phrase :** la moitié des élèves ont lu au moins 2 livres, la moyenne est d'environ 1,9 livre par élève, et les résultats s'échelonnent de 0 à 6 livres.

Le bilan de la plaquette. Médiane et moyenne sont ici très proches (2 et 1,94) : la série est régulière, sans valeur aberrante. Les deux indicateurs se confirment mutuellement.

Réponse. a) $m = 2$ — b) $\bar{x} = 1,94$ — c) $e = 6$.