

Plaque 1 - Reconnaître l'hypoténuse et écrire l'égalité

Théorème de Pythagore — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le théorème de Pythagore. Si un triangle ABC est rectangle en A , alors

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

- **L'hypoténuse** est le côté **opposé** à l'angle droit : dans un triangle rectangle en A , c'est $[BC]$, celui qui ne touche pas A .
- C'est aussi le **plus long** des trois côtés.
- Dans l'égalité, le carré de l'hypoténuse est **tout seul** d'un côté du signe $=$, et la somme des carrés des deux autres côtés de l'autre.
- **Repérer l'angle droit** : le petit carré codé sur la figure, ou la phrase « rectangle en ... » de l'énoncé.
- **Le nom du triangle ne dit rien** : dans « DEF rectangle en E », l'hypoténuse est $[DF]$, pas $[EF]$.

Comment écrire l'égalité en trois secondes.

Étape	Sur l'exemple « RST rectangle en S »
repérer le sommet de l'angle droit	S
l'hypoténuse joint les deux autres sommets	$[RT]$
écrire le carré de l'hypoténuse à gauche	$RT^2 = \dots$
ajouter les carrés des deux côtés de l'angle droit	$RT^2 = SR^2 + ST^2$

Notation. AB^2 se lit « AB au carré » et signifie $AB \times AB$. Une longueur est toujours positive.

Figure dans un solide. Une face d'un pavé droit est un rectangle : ses quatre angles sont droits, on peut donc y appliquer Pythagore.

Correction de l'exercice 1 - Lire l'angle droit sur la figure

- L'hypoténuse est le côté **opposé** à l'angle droit. L'angle droit est en A , donc l'hypoténuse est le côté qui ne touche pas A : c'est $[BC]$.
- Le théorème de Pythagore s'écrit en mettant le carré de l'hypoténuse seul à gauche :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

- À gauche : le carré de l'hypoténuse $[BC]$.
- À droite : la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit, $[AB]$ et $[AC]$.

Sur la figure, $[BC]$ est bien le plus long des trois côtés : c'est un bon contrôle.

Réponse. Hypoténuse : $[BC]$, et $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Correction de l'exercice 2 - L'angle droit change de sommet

- L'angle droit est en E : l'hypoténuse est le côté qui **ne touche pas** E , donc $[DF]$.
- On applique le théorème du cours :

$$DF^2 = ED^2 + EF^2$$

Piège. Beaucoup d'élèves écrivent $EF^2 = ED^2 + DF^2$ parce que les lettres E et F sont écrites en dernier dans le nom du triangle. Le nom DEF ne donne aucune information : seule compte la phrase « rectangle en E ».

Réponse. Hypoténuse : $[DF]$, et $DF^2 = ED^2 + EF^2$.

Correction de l'exercice 3 - Trois écritures, une seule correcte

L'angle droit est en H , donc l'hypoténuse est $[GI]$ (le côté qui ne touche pas H). Dans l'égalité de Pythagore, c'est **le carré de l'hypoténuse** qui est seul à gauche :

$$GI^2 = GH^2 + HI^2$$

C'est donc l'égalité **b**).

- L'égalité a) met GH^2 seul à gauche : elle correspondrait à un triangle rectangle en I .
- L'égalité c) met HI^2 seul à gauche : elle correspondrait à un triangle rectangle en G .

Réponse. L'égalité b) : $GI^2 = GH^2 + HI^2$.

Correction de l'exercice 4 - Corriger une égalité fausse

L'angle droit est en K : l'hypoténuse est $[LM]$, le côté opposé à K . L'élève a mis le carré de $[KL]$ seul à gauche, alors que $[KL]$ est un côté de l'angle droit.

L'égalité correcte est :

$$LM^2 = KL^2 + KM^2$$

Contrôle. L'hypoténuse est le plus long côté, donc LM^2 est le plus grand des trois carrés : il ne peut pas être une partie de la somme, il est la somme.

Réponse. Erreur sur l'hypoténuse : $LM^2 = KL^2 + KM^2$.

Correction de l'exercice 5 - Sans figure

Angle droit en $Q \Rightarrow$ hypoténuse $[PR]$. Le théorème du cours donne :

$$PR^2 = QP^2 + QR^2$$

L'hypoténuse est toujours le côté le plus long du triangle rectangle : le côté le plus long est $[PR]$.

Pourquoi ? Parce que $PR^2 = QP^2 + QR^2$ est une somme de deux nombres positifs : PR^2 est plus grand que QP^2 et plus grand que QR^2 .

Réponse. $PR^2 = QP^2 + QR^2$; le côté le plus long est $[PR]$.

Correction de l'exercice 6 - La diagonale d'un rectangle

a) Dans un rectangle, **les quatre angles sont droits**. La diagonale $[AC]$ partage $ABCD$ en deux triangles : ABC et ACD . Le triangle ABC a son angle droit en B (c'est un angle du rectangle).

b) Dans le triangle ABC rectangle en B , l'hypoténuse est $[AC]$:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

Remarque. On pourrait aussi travailler dans le triangle ACD , rectangle en D :

$AC^2 = AD^2 + DC^2$. Comme $AD = BC$ et $DC = AB$, on retrouve exactement la même égalité.

Réponse. ABC est rectangle en B et $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Correction de l'exercice 7 - La diagonale d'un carré

Un carré est un rectangle particulier : l'angle en F est droit. Dans le triangle EFG rectangle en F , l'hypoténuse est $[EG]$:

$$EG^2 = EF^2 + FG^2$$

Or les quatre côtés d'un carré ont la même longueur : $EF = FG = c$. Donc :

$$— EG^2 = c^2 + c^2$$

$$— EG^2 = 2c^2$$

La diagonale d'un carré n'est donc **jamais** égale au double du côté : son carré vaut deux fois le carré du côté.

Réponse. $EG^2 = EF^2 + FG^2 = 2c^2$.

Correction de l'exercice 8 - Côtés notés en minuscules

a) Le carré de l'hypoténuse est seul à gauche :

$$c^2 = a^2 + b^2$$

b) a et b sont des longueurs, donc $a^2 > 0$ et $b^2 > 0$. Alors :

$$— c^2 = a^2 + b^2 > a^2, \text{ donc } c > a ;$$

$$— \text{de même } c^2 = a^2 + b^2 > b^2, \text{ donc } c > b.$$

Le plus grand est c : **l'hypoténuse est toujours le plus long côté.**

Réponse. $c^2 = a^2 + b^2$; le plus grand est c , l'hypoténuse.

Correction de l'exercice 9 - Deux triangles rectangles accolés

La figure contient deux triangles rectangles, qui partagent le côté $[AH]$.

Dans le triangle ABH , rectangle en H , l'hypoténuse est $[AB]$:

$$AB^2 = HA^2 + HB^2$$

Dans le triangle ACH , rectangle en H , l'hypoténuse est $[AC]$:

$$AC^2 = HA^2 + HC^2$$

Piège. Le triangle ABC , lui, n'a aucune raison d'être rectangle : on ne peut pas écrire $BC^2 = AB^2 + AC^2$. On n'applique Pythagore que dans un triangle dont on **sait** qu'il est rectangle.

Réponse. $AB^2 = HA^2 + HB^2$ et $AC^2 = HA^2 + HC^2$.

Correction de l'exercice 10 - Repérer un triangle rectangle dans un pavé

a) Toutes les faces d'un pavé droit sont des **rectangles** : la face $ABCD$ est un rectangle.

b) Dans ce rectangle, l'angle en B est droit. Le triangle ABC est donc rectangle en B , et son hypoténuse est la diagonale $[AC]$:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

À retenir. Dans un solide, on cherche toujours une **face** (donc un rectangle) ou un triangle dont on sait qu'il a un angle droit : c'est là qu'on applique Pythagore.

Réponse. $ABCD$ est un rectangle ; ABC est rectangle en B et $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Correction de l'exercice 11 - Vrai ou faux

- a) **Faux.** L'hypoténuse est le côté **le plus long** : son carré est la somme des deux autres carrés, donc il est plus grand que chacun d'eux.
- b) **Faux.** Le théorème de Pythagore ne s'applique que dans un triangle **rectangle**. Dans un triangle quelconque, l'égalité est fausse.
- c) **Vrai.** L'angle droit est en C , donc l'hypoténuse est $[AB]$ et l'égalité s'écrit bien $AB^2 = CA^2 + CB^2$.
- d) **Faux.** La somme des angles d'un triangle vaut 180° . Avec deux angles droits on aurait déjà $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, et il ne resterait 0° pour le troisième : ce n'est pas un triangle.
- Réponse.** a) faux — b) faux — c) vrai — d) faux.

Correction de l'exercice 12 - Les carrés construits sur les côtés

- a) L'aire d'un carré de côté c vaut c^2 :
- carré construit sur $[AB]$: $3^2 = 9 \text{ cm}^2$;
 - carré construit sur $[AC]$: $4^2 = 16 \text{ cm}^2$.
- b) D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle ABC rectangle en A :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

- $BC^2 = 9 + 16$
- $BC^2 = 25$

Or BC^2 est justement l'aire du carré construit sur l'hypoténuse : cette aire vaut 25 cm^2 .

C'est la lecture historique du théorème : **l'aire du grand carré est la somme des aires des deux petits.**

Réponse. 9 cm^2 et 16 cm^2 ; le carré sur l'hypoténuse a une aire de 25 cm^2 .

Correction de l'exercice 13 - Retrouver l'angle droit

Dans l'égalité, le carré seul à gauche est celui de l'**hypoténuse** : ici c'est RS , donc $[RS]$ est l'hypoténuse.

L'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit. Le sommet qui n'appartient pas à $[RS]$ est T : le triangle est rectangle en T .

Contrôle. Les deux côtés dont les carrés s'ajoutent, $[TR]$ et $[TS]$, partent tous les deux de T : ce sont bien les deux côtés de l'angle droit.

Réponse. Le triangle RST est rectangle en T .

Correction de l'exercice 14 - Isoler le carré de l'inconnue

- a) L'angle droit est en N , donc l'hypoténuse est $[MP]$:

$$MP^2 = NM^2 + NP^2$$

- b) On cherche NP : c'est un côté de l'angle droit, son carré est **dans la somme**. On l'isole en retirant NM^2 des deux côtés de l'égalité :

$$NP^2 = MP^2 - NM^2$$

À retenir. Quand l'inconnue est l'hypoténuse, on **ajoute** les deux carrés ; quand l'inconnue est un côté de l'angle droit, on **soustrait** le carré du côté connu au carré de l'hypoténuse. Un résultat négatif signale qu'on s'est trompé de sens.

Réponse. $MP^2 = NM^2 + NP^2$, donc $NP^2 = MP^2 - NM^2$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : quatre triangles

On applique toujours la même méthode : l'hypoténuse joint les **deux sommets qui ne portent pas** l'angle droit, et son carré est seul à gauche.

a) Angle droit en C , hypoténuse $[AB]$:

$$AB^2 = CA^2 + CB^2$$

b) Angle droit en F , hypoténuse $[DE]$:

$$DE^2 = FD^2 + FE^2$$

c) Angle droit en I , hypoténuse $[GH]$:

$$GH^2 = IG^2 + IH^2$$

d) Angle droit en J , hypoténuse $[KL]$:

$$KL^2 = JK^2 + JL^2$$

Observation. Dans les trois premiers cas l'angle droit est au dernier sommet du nom, dans le dernier il est au premier : la place de la lettre dans le nom du triangle n'a aucune importance.

Réponse. a) $AB^2 = CA^2 + CB^2$ — b) $DE^2 = FD^2 + FE^2$ — c) $GH^2 = IG^2 + IH^2$ — d) $KL^2 = JK^2 + JL^2$.