

Plaquette 2 - Calculer la longueur de l'hypoténuse

Théorème de Pythagore — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le théorème. Si ABC est rectangle en A , alors

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Méthode pour calculer l'hypoténuse.

- repérer l'angle droit et l'hypoténuse ;
- écrire l'égalité de Pythagore ;
- remplacer par les longueurs connues et calculer les carrés ;
- ajouter : on obtient le carré cherché ;
- prendre la **racine carrée** pour revenir à la longueur.

La racine carrée. Pour un nombre positif a , $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré vaut a . Ainsi $\sqrt{25} = 5$ car $5^2 = 25$, et $\sqrt{0,49} = 0,7$.

Carrés à connaître par cœur.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	15	20	25
n^2	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	225	400	625

Arrondis. « Au dixième » = un chiffre après la virgule ; « au mm près » pour des longueurs en cm = deux chiffres après la virgule. On n'arrondit qu'à la **dernière** ligne, jamais en cours de calcul.

Contrôle de vraisemblance. L'hypoténuse trouvée doit être plus grande que chacun des deux autres côtés, et plus petite que leur somme.

Correction de l'exercice 1 - Le triangle 3-4-5

Le triangle ABC est rectangle en A , donc son hypoténuse est $[BC]$. D'après le théorème de Pythagore :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

- On remplace : $BC^2 = 3^2 + 4^2$.
- On calcule les carrés : $BC^2 = 9 + 16$.
- On ajoute : $BC^2 = 25$.
- On prend la racine carrée : $BC = \sqrt{25} = 5$.

La longueur BC vaut donc 5 cm.

Contrôle. $5 > 4$ et $5 > 3$: l'hypoténuse est bien le plus long côté.

Réponse. $BC = 5$ cm.

Correction de l'exercice 2 - Angle droit en B

L'angle droit est en B : l'hypoténuse est $[AC]$, le côté opposé à B . D'après le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = BA^2 + BC^2$$

- $AC^2 = 6^2 + 8^2$
- $AC^2 = 36 + 64$
- $AC^2 = 100$
- $AC = \sqrt{100} = 10$

La longueur AC vaut 10 cm.

Remarque. C'est le triangle 3-4-5 agrandi deux fois : $6 = 2 \times 3$, $8 = 2 \times 4$ et $10 = 2 \times 5$.

Réponse. $AC = 10$ cm.

Correction de l'exercice 3 - Un résultat exact

Le triangle RST est rectangle en S , son hypoténuse est $[RT]$:

$$RT^2 = SR^2 + ST^2$$

- $RT^2 = 5^2 + 12^2$
- $RT^2 = 25 + 144$
- $RT^2 = 169$
- $RT = \sqrt{169} = 13$

La longueur RT vaut 13 cm.

Piège. $\sqrt{169}$ ne vaut pas 13,5 ni 84,5 : c'est le nombre dont le **carré** vaut 169. On vérifie : $13 \times 13 = 169$ ✓

Réponse. $RT = 13$ cm.

Correction de l'exercice 4 - Des nombres plus grands

L'angle droit est en N , l'hypoténuse est $[MP]$:

$$MP^2 = NM^2 + NP^2$$

- $MP^2 = 9^2 + 12^2$
- $MP^2 = 81 + 144$
- $MP^2 = 225$
- $MP = \sqrt{225} = 15$

La longueur MP vaut 15 cm.

Contrôle. 15 est bien compris entre 12 (le plus grand côté de l'angle droit) et $9 + 12 = 21$.

Réponse. $MP = 15$ cm.

Correction de l'exercice 5 - Avec des nombres décimaux

Le triangle EFG est rectangle en F , son hypoténuse est $[EG]$:

$$EG^2 = FE^2 + FG^2$$

- $EG^2 = 2,1^2 + 2,8^2$
- $EG^2 = 4,41 + 7,84$
- $EG^2 = 12,25$
- $EG = \sqrt{12,25} = 3,5$

La longueur EG vaut 3,5 cm.

Piège. $2,1^2$ n'est pas 4,2 : élever au carré, c'est multiplier le nombre par lui-même, $2,1 \times 2,1 = 4,41$.

Réponse. $EG = 3,5$ cm.

Correction de l'exercice 6 - Un arrondi au dixième

Le triangle est rectangle en A, l'hypoténuse est $[BC]$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$- BC^2 = 5^2 + 7^2$$

$$- BC^2 = 25 + 49$$

$$- BC^2 = 74$$

74 n'est pas un carré parfait ($8^2 = 64$ et $9^2 = 81$), la valeur exacte est donc $BC = \sqrt{74}$ cm.

À la calculatrice, $\sqrt{74} \approx 8,602$, donc $BC \approx 8,6$ cm au dixième près.

Rédaction. On garde le signe = pour la valeur exacte et le signe $\approx$ dès qu'on arrondit.

Réponse. $BC = \sqrt{74}$ cm $\approx 8,6$ cm.

Correction de l'exercice 7 - Un triangle agrandi

Angle droit en J, hypoténuse $[IK]$:

$$IK^2 = JI^2 + JK^2$$

$$- IK^2 = 4,5^2 + 6^2$$

$$- IK^2 = 20,25 + 36$$

$$- IK^2 = 56,25$$

$$- IK = \sqrt{56,25} = 7,5$$

La longueur IK vaut 7,5 cm.

Remarque. C'est encore le triangle 3-4-5, multiplié par 1,5 : $3 \times 1,5 = 4,5$, $4 \times 1,5 = 6$ et $5 \times 1,5 = 7,5$.

Réponse. $IK = 7,5$ cm.

Correction de l'exercice 8 - Longueurs en mètres

Angle droit en V, hypoténuse $[UW]$:

$$UW^2 = VU^2 + VW^2$$

$$- UW^2 = 1,2^2 + 1,6^2$$

$$- UW^2 = 1,44 + 2,56$$

$$- UW^2 = 4$$

$$- UW = \sqrt{4} = 2$$

La longueur UW vaut 2 m.

Attention aux unités. Les deux longueurs de départ sont en mètres, le résultat est donc en mètres. Si l'énoncé mélangeait cm et m, il faudrait tout convertir **avant** de calculer.

Réponse. $UW = 2$ m.

Correction de l'exercice 9 - Diagonale d'un rectangle

Dans un rectangle, tous les angles sont droits : le triangle ABC est rectangle en B, et son hypoténuse est la diagonale $[AC]$.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$- AC^2 = 9^2 + 5^2$$

- $AC^2 = 81 + 25$
- $AC^2 = 106$
- $AC = \sqrt{106} \approx 10,295$

Arrondi au millimètre (deux décimales pour des cm) : $AC \approx 10,30$ cm.

Contrôle. La diagonale est plus longue que la longueur du rectangle ($10,3 > 9$) : c'est cohérent.

Réponse. $AC = \sqrt{106}$ cm $\approx 10,30$ cm.

Correction de l'exercice 10 - Diagonale d'un carré

Le carré $ABCD$ a un angle droit en B ; le triangle ABC est rectangle en B et son hypoténuse est la diagonale $[AC]$:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

- $AC^2 = 7^2 + 7^2$
- $AC^2 = 49 + 49$
- $AC^2 = 98$
- $AC = \sqrt{98} \approx 9,899$

La diagonale mesure environ 9,9 cm.

Piège classique. La diagonale ne vaut pas 14 cm (le double du côté) : elle vaut environ 1,41 fois le côté.

Réponse. Diagonale = $\sqrt{98}$ cm $\approx 9,9$ cm.

Correction de l'exercice 11 - Le hauban du mât

Le mât est vertical et le sol horizontal : le triangle formé par le pied du mât P , le sommet H et le piquet S est **rectangle en P** . Le câble $[SH]$ en est l'hypoténuse.

$$SH^2 = PS^2 + PH^2$$

- $SH^2 = 2,5^2 + 6^2$
- $SH^2 = 6,25 + 36$
- $SH^2 = 42,25$
- $SH = \sqrt{42,25} = 6,5$

Le câble mesure 6,5 m.

Où est l'angle droit ? C'est la question à se poser dans tout problème concret : ici, « vertical » et « horizontal » se croisent à angle droit.

Réponse. Le câble mesure 6,5 m.

Correction de l'exercice 12 - La diagonale de l'écran

a) L'écran est un rectangle : le triangle formé par un côté horizontal, un côté vertical et la diagonale est rectangle. En notant d la diagonale :

$$d^2 = 80^2 + 60^2$$

- $d^2 = 6400 + 3600$
- $d^2 = 10\,000$
- $d = \sqrt{10\,000} = 100$

La diagonale mesure 100 cm.

b) On convertit en divisant par 2,54 :

$$— 100 \div 2,54 \approx 39,37$$

L'écran fait donc environ 39 pouces.

Contrôle. C'est encore un triangle 3-4-5 agrandi 20 fois.

Réponse. a) 100 cm — b) environ 39 pouces.

Correction de l'exercice 13 - Deux calculs à la suite

Étape 1 : calculer BC . Le triangle ABC est rectangle en A , d'hypoténuse $[BC]$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$— BC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$— BC = \sqrt{25} = 5, \text{ donc } BC = 5 \text{ cm.}$$

Étape 2 : calculer BD . Le triangle BCD est rectangle en C , d'hypoténuse $[BD]$:

$$BD^2 = CB^2 + CD^2$$

$$— BD^2 = 5^2 + 12^2$$

$$— BD^2 = 25 + 144$$

$$— BD^2 = 169$$

$$— BD = \sqrt{169} = 13$$

La longueur BD vaut 13 cm.

Méthode. Quand une longueur manque, on cherche d'abord un triangle rectangle où tout est connu : il fournit la donnée qui manque au second.

Réponse. $BC = 5$ cm puis $BD = 13$ cm.

Correction de l'exercice 14 - Quel trajet est le plus court ?

Trajet de Léa. Elle longe deux côtés :

$$— 40 + 30 = 70, \text{ soit } 70 \text{ m.}$$

Trajet de Malik. Il parcourt la diagonale $[AC]$. Le triangle ABC est rectangle en B (angle du rectangle), d'hypoténuse $[AC]$:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$— AC^2 = 40^2 + 30^2$$

$$— AC^2 = 1600 + 900$$

$$— AC^2 = 2500$$

$$— AC = \sqrt{2500} = 50$$

Malik parcourt 50 m.

Économie. $70 - 50 = 20$: Malik parcourt 20 m de moins que Léa.

À retenir. Dans un triangle, un côté est toujours plus court que la somme des deux autres : couper par la diagonale est forcément plus court.

Réponse. Léa : 70 m ; Malik : 50 m ; il économise 20 m.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : quatre hypoténuses

Dans les quatre cas on applique la même égalité : le carré de l'hypoténuse est la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit.

$$\text{a) } 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 \text{ et } \sqrt{289} = 17 : \text{ l'hypoténuse mesure } 17 \text{ cm.}$$

$$\text{b) } 20^2 + 21^2 = 400 + 441 = 841 \text{ et } \sqrt{841} = 29 : \text{ l'hypoténuse mesure } 29 \text{ cm.}$$

c) $1,5^2 + 2^2 = 2,25 + 4 = 6,25$ et $\sqrt{6,25} = 2,5$: l'hypoténuse mesure 2,5 cm.

d) $10^2 + 10^2 = 100 + 100 = 200$ et $\sqrt{200} \approx 14,14$: l'hypoténuse mesure $\sqrt{200}$ cm, soit environ 14,1 cm.

Observation. Les trois premiers sont des « triplets » qui tombent juste ; le dernier, celui du carré, ne tombe jamais juste.

Réponse. a) 17 cm — b) 29 cm — c) 2,5 cm — d) $\sqrt{200} \approx 14,1$ cm.