

Plaque 4 - Réciproque : le triangle est-il rectangle ?

Théorème de Pythagore — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Réciproque du théorème de Pythagore. Dans un triangle ABC où $[BC]$ est le plus grand côté : si

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

alors le triangle ABC est rectangle en A .

Contraposée. Si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, alors le triangle **n'est pas** rectangle.

La rédaction attendue, en quatre temps.

- le plus grand côté est $[BC]$: s'il y a un angle droit, il est en A ;
- calcul n°1 : $BC^2 = \dots$;
- calcul n°2 : $AB^2 + AC^2 = \dots$;
- comparaison et conclusion : égaux $\Rightarrow$ rectangle en A ; différents $\Rightarrow$ pas rectangle.

Pourquoi le plus grand côté ? Parce que l'hypoténuse est toujours le plus long côté : si le triangle est rectangle, l'angle droit est forcément opposé au plus grand côté.

Triplets pythagoriciens utiles (et tous leurs multiples) :

Triplet	3 ; 4 ; 5	5 ; 12 ; 13	8 ; 15 ; 17	7 ; 24 ; 25	20 ; 21 ; 29
Exemple de multiple	6 ; 8 ; 10	10 ; 24 ; 26	16 ; 30 ; 34	14 ; 48 ; 50	40 ; 42 ; 58

Interdit. Écrire « $BC^2 = AB^2 + AC^2$ donc le triangle est rectangle » **avant** d'avoir comparé : on partirait de ce qu'on veut démontrer.

Correction de l'exercice 1 - Un premier test

Le plus grand côté est $[BC]$ (10 cm) : si le triangle est rectangle, il l'est en A , sommet opposé à $[BC]$. L'égalité à tester est donc celle du cours :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

On calcule séparément les deux membres — tant qu'ils ne sont pas comparés, on n'a pas le droit d'écrire le signe = entre eux.

- D'une part : $BC^2 = 10^2 = 100$.
- D'autre part : $AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$.

On constate que $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

D'après la **réciproque du théorème de Pythagore**, le triangle ABC est rectangle en A .

Réponse. Oui, ABC est rectangle en A .

Correction de l'exercice 2 - Un triplet connu

Le plus grand côté est $[DF]$ (13 cm) : l'angle droit éventuel est en E , le sommet opposé. L'égalité à tester est :

$$DF^2 = ED^2 + EF^2$$

— D'une part : $DF^2 = 13^2 = 169$.

— D'autre part : $ED^2 + EF^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$.

Les deux résultats sont égaux, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, DEF est rectangle **en** E .

Attention à la conclusion. Il ne suffit pas de dire « oui » : on doit préciser **où** est l'angle droit, et c'est toujours le sommet opposé au plus grand côté.

Réponse. Oui, DEF est rectangle en E .

Correction de l'exercice 3 - Un triangle qui ne l'est pas

Le plus grand côté est $[GI]$ (7 cm) : l'angle droit éventuel serait en H . L'égalité à tester est :

$$GI^2 = HG^2 + HI^2$$

— D'une part : $GI^2 = 7^2 = 49$.

— D'autre part : $HG^2 + HI^2 = 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$.

Or $49 \neq 41$.

D'après la **contraposée** du théorème de Pythagore, le triangle GHI **n'est pas rectangle**.

Vocabulaire. Quand l'égalité est vérifiée on invoque la réciproque ; quand elle ne l'est pas, on invoque la contraposée. Les deux formulations sont acceptées, mais il faut nommer le théorème utilisé.

Réponse. Non : $49 \neq 41$, le triangle n'est pas rectangle.

Correction de l'exercice 4 - Un multiple d'un triplet

Le plus grand côté est $[JL]$ (15 cm) : l'angle droit éventuel est en K .

— D'une part : $JL^2 = 15^2 = 225$.

— D'autre part : $KJ^2 + KL^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$.

Les deux nombres sont égaux, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, JKL est rectangle en K .

Lecture rapide. $9 = 3 \times 3$, $12 = 3 \times 4$, $15 = 3 \times 5$: c'est le triangle 3-4-5 agrandi trois fois. Tous les multiples d'un triplet pythagoricien donnent encore un triangle rectangle — mais en contrôle, le calcul reste exigé.

Réponse. Oui, rectangle en K ($225 = 225$).

Correction de l'exercice 5 - Grandes valeurs

Le plus grand côté est $[AC]$ (25 cm) : c'est lui qui joue le rôle de l'hypoténuse si le triangle est rectangle, et l'angle droit serait alors en B . L'égalité à tester :

$$AC^2 = BA^2 + BC^2$$

— D'une part : $25^2 = 625$.

— D'autre part : $BA^2 + BC^2 = 7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625$.

Les deux résultats sont égaux : d'après la réciproque du théorème de Pythagore, ce triangle **est rectangle en** B .

Contrôle de bon sens. $7 + 24 = 31 > 25$: l'inégalité triangulaire est respectée, un tel triangle existe bien.

Réponse. Oui : $625 = 625$, le triangle est rectangle en B .

Correction de l'exercice 6 - Presque, mais pas tout à fait

Le plus grand côté est $[MP]$ (12 cm) : l'angle droit éventuel serait en N .

— D'une part : $MP^2 = 12^2 = 144$.

— D'autre part : $NM^2 + NP^2 = 8^2 + 9^2 = 64 + 81 = 145$.

Or $144 \neq 145$: les deux nombres sont proches, mais **différents**.

D'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle MNP n'est pas rectangle.

Le piège de l'œil. Sur un dessin, un écart de 1 entre 144 et 145 est invisible : l'angle mesure environ 89° . Seul le calcul permet de conclure — une figure ne démontre jamais rien.

Réponse. Non : $144 \neq 145$.

Correction de l'exercice 7 - Avec des décimaux

Le plus grand côté est $[RT]$ (3,5 cm) : l'angle droit éventuel est en S .

— D'une part : $RT^2 = 3,5^2 = 12,25$.

— D'autre part : $SR^2 + ST^2 = 2,1^2 + 2,8^2 = 4,41 + 7,84 = 12,25$.

Égalité vérifiée : d'après la réciproque du théorème de Pythagore, RST est rectangle en S .

Conseil de calcul. On élève au carré **sans arrondir** : $2,1^2 = 4,41$ exactement. Un arrondi intermédiaire ferait apparaître une fausse différence.

Réponse. Oui, rectangle en S .

Correction de l'exercice 8 - Un triplet moins connu

Le plus grand côté mesure 29 cm.

— D'une part : $29^2 = 841$.

— D'autre part : $20^2 + 21^2 = 400 + 441 = 841$.

Les deux nombres sont égaux : d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est rectangle, l'angle droit étant opposé au côté de 29 cm.

Remarque. 20 ; 21 ; 29 n'est le multiple d'aucun triplet plus petit : il existe une infinité de triplets pythagoriciens, on ne peut pas se contenter de reconnaître 3-4-5.

Réponse. Oui, le triangle est rectangle.

Correction de l'exercice 9 - Un triangle isocèle

Le plus grand côté est la base, 14 cm : l'angle droit éventuel serait au sommet opposé à la base, c'est-à-dire le sommet principal.

— D'une part : $14^2 = 196$.

— D'autre part : $10^2 + 10^2 = 100 + 100 = 200$.

Or $196 \neq 200$: d'après la contraposée du théorème de Pythagore, ce triangle n'est pas rectangle.

Pour aller plus loin. Comme $196 < 200$, la base est un peu **plus courte** que ce qu'elle serait dans un triangle rectangle isocèle : l'angle au sommet est légèrement inférieur à 90° . Pour qu'il soit droit, il faudrait une base de $\sqrt{200} \approx 14,1$ cm.

Réponse. Non : $196 \neq 200$.

Correction de l'exercice 10 - Le menuisier vérifie son cadre

Les trois mesures forment un triangle dont le plus grand côté est la diagonale, 100 cm : l'angle droit éventuel est celui du coin, entre les deux côtés de 60 cm et 80 cm.

— D'une part : $100^2 = 10\,000$.

— D'autre part : $60^2 + 80^2 = 3600 + 6400 = 10\,000$.

Les deux résultats sont égaux, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est rectangle : le coin du cadre forme bien un angle droit.

Dans la vraie vie. C'est la méthode « 3-4-5 » des artisans : on mesure 3 unités sur un côté, 4 sur l'autre, et si la diagonale fait 5 unités, l'angle est droit.

Réponse. Oui : $10\,000 = 10\,000$, l'angle du cadre est droit.

Correction de l'exercice 11 - Un triangle à mesures décimales

Le plus grand côté est $[UW]$ (12,5 cm) : l'angle droit éventuel est en V .

— D'une part : $UW^2 = 12,5^2 = 156,25$.

— D'autre part : $VU^2 + VW^2 = 3,5^2 + 12^2 = 12,25 + 144 = 156,25$.

Égalité vérifiée : d'après la réciproque du théorème de Pythagore, UVW est rectangle en V .

Réponse. Oui, rectangle en V .

Correction de l'exercice 12 - Le terrain du club

Le plus grand côté mesure 24 m : si deux côtés étaient perpendiculaires, ce seraient ceux de 15 m et 20 m.

— D'une part : $24^2 = 576$.

— D'autre part : $15^2 + 20^2 = 225 + 400 = 625$.

Or $576 \neq 625$: d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle n'est pas rectangle. Le président a **tort**.

Précision. Pour que l'angle soit droit, le troisième côté devrait mesurer $\sqrt{625} = 25$ m et non 24 m. L'écart est petit mais réel.

Réponse. Non : $576 \neq 625$, aucun angle n'est droit.

Correction de l'exercice 13 - Utiliser le théorème direct pour conclure

Ici, on **sait** que le triangle est rectangle : on utilise le théorème direct, pas sa réciproque.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

— $BC^2 = 9^2 + 12^2$

— $BC^2 = 81 + 144$

— $BC^2 = 225$

— $BC = \sqrt{225} = 15$

La longueur BC vaut nécessairement 15 cm. La mesure annoncée, 14 cm, est donc **impossible** : l'élève s'est trompé d'un centimètre.

Ce qu'il faut distinguer.

On sait que le triangle est rectangle	On cherche s'il est rectangle
théorème direct	réci-proque
on calcule une longueur	on compare deux nombres

Réponse. Non : BC vaut nécessairement 15 cm.

Correction de l'exercice 14 - Avec des dixièmes

Le plus grand côté mesure 3,9 cm.

— D'une part : $3,9^2 = 15,21$.

— D'autre part : $1,5^2 + 3,6^2 = 2,25 + 12,96 = 15,21$.

Les deux nombres sont égaux : d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est rectangle, l'angle droit étant opposé au côté de 3,9 cm.

Remarque. En multipliant les trois longueurs par 10 on obtient 15 ; 36 ; 39, qui est le triplet 5-12-13 multiplié par 3.

Réponse. Oui, le triangle est rectangle.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : quatre triangles à trier

a) Plus grand côté : 61. D'une part $61^2 = 3721$; d'autre part $11^2 + 60^2 = 121 + 3600 = 3721$. Égalité : le triangle **est rectangle**.

b) Plus grand côté : 9. D'une part $9^2 = 81$; d'autre part $6^2 + 7^2 = 36 + 49 = 85$. Comme $81 \neq 85$, le triangle **n'est pas** rectangle.

c) Plus grand côté : 34. D'une part $34^2 = 1156$; d'autre part $16^2 + 30^2 = 256 + 900 = 1156$. Égalité : le triangle **est rectangle** (c'est le triplet 8-15-17 doublé).

d) Plus grand côté : 4. D'une part $4^2 = 16$; d'autre part $2,4^2 + 3,2^2 = 5,76 + 10,24 = 16$. Égalité : le triangle **est rectangle** (c'est 3-4-5 multiplié par 0,8).

Bilan. Trois rectangles, un seul qui ne l'est pas — et impossible de le deviner sans calculer.

Réponse. a) rectangle — b) non — c) rectangle — d) rectangle.