

Plaque 5 - Problèmes : Pythagore dans la vie courante et dans l'espace

Théorème de Pythagore — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le théorème. Si ABC est rectangle en A : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Sa réciproque. Si $[BC]$ est le plus grand côté et si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors ABC est rectangle en A .

Où trouver l'angle droit dans un problème ?

- un mur (vertical) et le sol (horizontal) ;
- deux côtés consécutifs d'un rectangle ou d'un carré ;
- une hauteur et la base qu'elle coupe ;
- les diagonales d'un losange (ou d'un carré), perpendiculaires ;
- une face d'un pavé droit, et une arête verticale posée dessus.

Diagonale d'un pavé droit, en deux temps. Pour la grande diagonale $[AG]$ d'un pavé $ABCDEFGH$:

- dans la face $ABCD$ (rectangle en B) : $AC^2 = AB^2 + BC^2$;
- l'arête $[CG]$ est perpendiculaire à la face, donc ACG est rectangle en C :
 $AG^2 = AC^2 + CG^2$.

Formules d'aire utiles.

$$A_{\text{triangle}} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} \quad A_{\text{rectangle}} = L \times l$$

Unités. Tout convertir dans la même unité **avant** de calculer. Une longueur s'arrondit selon la consigne, jamais avant la dernière ligne.

Phrase de conclusion. Elle répond à la question posée : « le câble mesure 6,5 m », pas « $x = 6,5$ ».

Correction de l'exercice 1 - La télévision et son carton

L'écran passe si **chacune** de ses dimensions est inférieure à celle de l'ouverture — inutile ici de calculer une diagonale.

- Largeur : $120 < 130$ ✓
- Hauteur : $70 < 80$ ✓

L'écran passe donc par l'ouverture.

On peut aussi comparer les diagonales, par curiosité. Écran :

$$d^2 = 120^2 + 70^2$$

- $d^2 = 14\,400 + 4\,900 = 19\,300$ et $d = \sqrt{19\,300} \approx 138,9$ cm.

Ouverture : $130^2 + 80^2 = 16\,900 + 6\,400 = 23\,300$ et $\sqrt{23\,300} \approx 152,6$ cm.

Attention. Comparer uniquement les diagonales ne suffirait **pas** à conclure : un objet très long et très fin peut avoir une petite diagonale et ne pas passer. Ce sont les deux dimensions qui décident.

Réponse. Oui : $120 < 130$ et $70 < 80$.

Correction de l'exercice 2 - La grande diagonale d'un pavé

a) La face $ABCD$ est un rectangle, donc le triangle ABC est rectangle en B , d'hypoténuse $[AC]$:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

- $AC^2 = 8^2 + 6^2$
- $AC^2 = 64 + 36$
- $AC^2 = 100$
- $AC = \sqrt{100} = 10$

La diagonale AC mesure 10 cm.

b) L'arête $[CG]$ est perpendiculaire au plan de la face $ABCD$, donc perpendiculaire à $[AC]$: le triangle ACG est rectangle en C , d'hypoténuse $[AG]$:

$$AG^2 = AC^2 + CG^2$$

- $AG^2 = 10^2 + 5^2$
- $AG^2 = 100 + 25$
- $AG^2 = 125$
- $AG = \sqrt{125} \approx 11,18$

La grande diagonale AG mesure environ 11,2 cm.

Méthode à retenir. Une diagonale de solide se calcule **toujours** en deux applications de Pythagore : d'abord dans une face, puis dans le triangle « debout » qui utilise cette diagonale de face.

Réponse. a) $AC = 10$ cm — b) $AG = \sqrt{125}$ cm $\approx 11,2$ cm.

Correction de l'exercice 3 - La canne à pêche dans la valise

La plus grande longueur qui tient dans un pavé droit est sa **grande diagonale**. On la calcule en deux temps, en notant d la diagonale du fond et D la grande diagonale.

Étape 1 — diagonale du fond (rectangle 70×40) :

$$d^2 = 70^2 + 40^2$$

- $d^2 = 4900 + 1600 = 6500$

Étape 2 — grande diagonale, dans le triangle rectangle formé par d et la hauteur :

$$D^2 = d^2 + 25^2$$

- $D^2 = 6500 + 625$
- $D^2 = 7125$
- $D = \sqrt{7125} \approx 84,4$

La plus grande longueur rangeable est d'environ 84,4 cm.

Or $85 > 84,4$: la canne **ne rentre pas**, il s'en faut de six millimètres.

Astuce de calcul. On garde $d^2 = 6500$ sans extraire la racine : c'est d^2 qui sert à l'étape suivante, pas d . Arrondir d ferait perdre de la précision.

Réponse. Non : la plus grande diagonale vaut $\sqrt{7125} \approx 84,4$ cm < 85 cm.

Correction de l'exercice 4 - Le toboggan

L'échelle est verticale, le sol horizontal : le triangle PBH est rectangle en P . La glissière $[BH]$ en est l'hypoténuse.

$$BH^2 = PB^2 + PH^2$$

- $BH^2 = 3,2^2 + 2,4^2$
- $BH^2 = 10,24 + 5,76$
- $BH^2 = 16$
- $BH = \sqrt{16} = 4$

La glissière mesure 4 m.

Contrôle. $4 > 3,2$ et $4 > 2,4$: l'hypoténuse est bien le plus long côté.

Réponse. La glissière mesure 4 m.

Correction de l'exercice 5 - Le cerf-volant

En notant S la personne, P le point du sol à la verticale du cerf-volant et C le cerf-volant : la verticale $[PC]$ et le sol horizontal $[SP]$ forment un angle droit en P . La ficelle $[SC]$ est l'hypoténuse.

$$SC^2 = PS^2 + PC^2$$

- $50^2 = 30^2 + PC^2$
- $2500 = 900 + PC^2$
- $PC^2 = 2500 - 900$
- $PC^2 = 1600$
- $PC = \sqrt{1600} = 40$

Le cerf-volant vole à 40 m de hauteur.

Attention. On cherche ici un côté de l'angle droit : on **soustrait**. Écrire $PC^2 = 50^2 + 30^2$ donnerait une hauteur supérieure à la longueur de la ficelle, ce qui est absurde.

Réponse. Le cerf-volant est à 40 m de hauteur.

Correction de l'exercice 6 - Le trajet du facteur

a) Le triangle ABC est rectangle en B (angle du rectangle), d'hypoténuse $[AC]$:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

- $AC^2 = 120^2 + 50^2$
- $AC^2 = 14\,400 + 2\,500$
- $AC^2 = 16\,900$
- $AC = \sqrt{16\,900} = 130$

L'allée mesure 130 m.

b) Par le chemin goudronné : $120 + 50 = 170$ m. L'économie est de :

- $170 - 130 = 40$, soit 40 m.

En pourcentage du trajet initial :

$$\frac{40}{170} \approx 0,235$$

soit environ 24%.

Le facteur économise 40 m, c'est-à-dire environ 24% de son trajet.

Rédaction. Un pourcentage se calcule toujours par rapport à la valeur de **départ**, ici les 170 m du chemin goudronné.

Réponse. a) 130 m — b) 40 m économisés, soit environ 24%.

Correction de l'exercice 7 - La hauteur d'un triangle équilatéral

a) Le triangle est équilatéral : ses trois côtés mesurent 6 cm. Comme H est le milieu de $[BC]$:

$$— BH = \frac{6}{2} = 3, \text{ soit } BH = 3 \text{ cm.}$$

Le triangle ABH est rectangle en H , d'hypoténuse $[AB]$:

$$AB^2 = HA^2 + HB^2$$

$$— 6^2 = AH^2 + 3^2$$

$$— 36 = AH^2 + 9$$

$$— AH^2 = 36 - 9$$

$$— AH^2 = 27$$

$$— AH = \sqrt{27} \approx 5,196$$

La hauteur mesure environ 5,2 cm.

b) L'aire d'un triangle vaut :

$$A = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$$

$$— A = \frac{6 \times \sqrt{27}}{2}$$

$$— A = 3\sqrt{27} \approx 15,59$$

L'aire vaut environ 15,6 cm².

Précision. Pour l'aire, on repart de la valeur **exacte** $\sqrt{27}$ et non de l'arrondi 5,2 : avec 5,2 on trouverait 15,6 également, mais sur d'autres données l'écart se verrait.

Réponse. a) $AH = \sqrt{27} \approx 5,2$ cm — b) $A \approx 15,6$ cm².

Correction de l'exercice 8 - Le champ triangulaire

a) Le plus grand côté est $[BC]$ (85 m) : l'angle droit éventuel est en A .

$$— \text{D'une part : } BC^2 = 85^2 = 7225.$$

$$— \text{D'autre part : } AB^2 + AC^2 = 40^2 + 75^2 = 1600 + 5625 = 7225.$$

Les deux nombres sont égaux, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A .

b) Dans un triangle rectangle, les deux côtés de l'angle droit sont la base et la hauteur :

$$A = \frac{AB \times AC}{2}$$

$$— A = \frac{40 \times 75}{2}$$

$$— A = \frac{3000}{2}$$

$$— A = 1500$$

L'aire du champ est de 1500 m².

Pourquoi c'est pratique. Sans l'angle droit, il faudrait connaître une hauteur du triangle. La réciproque de Pythagore la fournit gratuitement.

Réponse. a) rectangle en A ($7225 = 7225$) — b) 1500 m^2 .

Correction de l'exercice 9 - Le mur de soutènement

Chaque barre est l'hypoténuse d'un triangle rectangle : le mur est vertical, le sol horizontal.

Première barre, en notant b_1 sa longueur :

$$b_1^2 = 1,8^2 + 3^2$$

$$— b_1^2 = 3,24 + 9 = 12,24$$

$$— b_1 = \sqrt{12,24} \approx 3,499$$

Seconde barre, de longueur b_2 :

$$b_2^2 = 4^2 + 3^2$$

$$— b_2^2 = 16 + 9 = 25$$

$$— b_2 = \sqrt{25} = 5$$

Total : $3,499 + 5 = 8,499$, soit environ $8,50 \text{ m}$.

Il faut environ $8,50 \text{ m}$ de barre.

Arrondi. On n'arrondit qu'à la fin : arrondir b_1 à $3,5$ avant d'ajouter donnerait $8,5 \text{ m}$ également ici, mais la règle reste de sommer les valeurs non arrondies.

Réponse. Environ $8,50 \text{ m}$ de barre.

Correction de l'exercice 10 - Le trapèze rectangle

On abaisse la perpendiculaire à (AB) passant par C ; elle coupe $[AB]$ en H . Le quadrilatère $AHCD$ a quatre angles droits : c'est un rectangle, donc :

$$— AH = DC = 7 \text{ cm et } HC = AD = 12 \text{ cm.}$$

On en déduit :

$$— HB = AB - AH = 12 - 7 = 5, \text{ soit } HB = 5 \text{ cm.}$$

Le triangle BHC est rectangle en H , d'hypoténuse $[BC]$:

$$BC^2 = HB^2 + HC^2$$

$$— BC^2 = 5^2 + 12^2$$

$$— BC^2 = 25 + 144$$

$$— BC^2 = 169$$

$$— BC = \sqrt{169} = 13$$

Le côté oblique mesure 13 cm — une valeur exacte, l'arrondi est inutile.

Méthode. Dans un trapèze rectangle, on crée le triangle rectangle manquant en traçant la hauteur : c'est le tracé à avoir en tête.

Réponse. $BC = 13 \text{ cm}$.

Correction de l'exercice 11 - Le bassin et sa bache

Le trajet est la **grande diagonale** du pavé. On procède en deux temps, en notant $ABCD$ le fond et $EFGH$ le bord (E au-dessus de A).

Étape 1 — diagonale du fond, dans le triangle ABC rectangle en B :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

- $AC^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$
- $AC = \sqrt{25} = 5$, donc $AC = 5$ m.

Étape 2 — trajet du plongeur, dans le triangle EAC rectangle en A (l'arête $[EA]$ est verticale, donc perpendiculaire au fond) :

$$EC^2 = AE^2 + AC^2$$

- $EC^2 = 1,5^2 + 5^2$
- $EC^2 = 2,25 + 25$
- $EC^2 = 27,25$
- $EC = \sqrt{27,25} \approx 5,220$

Le plongeur parcourt environ 5,22 m.

Contrôle. Le trajet est un peu plus long que la diagonale du fond (5 m) : c'est cohérent, il descend en plus de 1,5 m.

Réponse. Environ 5,22 m.

Correction de l'exercice 12 - Deux villages et une route

a) Les deux routes sont perpendiculaires : le triangle ABC est rectangle en C , et la route directe $[AB]$ en est l'hypoténuse.

$$AB^2 = CA^2 + CB^2$$

- $AB^2 = 9^2 + 12^2$
- $AB^2 = 81 + 144$
- $AB^2 = 225$
- $AB = \sqrt{225} = 15$

La route directe mesurerait 15 km.

b) Le trajet actuel passe par le carrefour :

- $9 + 12 = 21$, soit 21 km.

L'économie de distance est de $21 - 15 = 6$ km, et l'économie d'argent :

- $6 \times 0,80 = 4,80$

On économiserait 4,80 € par trajet.

Réponse. a) 15 km — b) 6 km économisés, soit 4,80 €.

Correction de l'exercice 13 - Contrôler la perpendicularité d'un terrain

Si les bordures étaient perpendiculaires, le triangle formé serait rectangle, et le plus grand côté (la distance mesurée) serait l'hypoténuse.

- D'une part : $2,1^2 = 4,41$.
- D'autre part : $1,2^2 + 1,6^2 = 1,44 + 2,56 = 4$.

Or $4,41 \neq 4$: d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle n'est pas rectangle. Les bordures **ne sont pas perpendiculaires**.

Pour qu'elles le soient, la distance devrait vérifier $d^2 = 4$, c'est-à-dire :

- $d = \sqrt{4} = 2$

Le jardinier devrait mesurer 2 m entre les deux extrémités.

Interprétation. Il mesure 2,1 m, soit plus que 2 m : l'angle entre les bordures est donc légèrement **supérieur** à 90° .

Réponse. Non ; il devrait mesurer 2 m.

Correction de l'exercice 14 - Le périmètre du losange

a) Les diagonales d'un losange se coupent en leur milieu O et sont perpendiculaires.
Donc :

$$- OA = \frac{30}{2} = 15, \text{ soit } OA = 15 \text{ cm ;}$$

$$- OB = \frac{16}{2} = 8, \text{ soit } OB = 8 \text{ cm.}$$

Le triangle AOB est rectangle en O , d'hypoténuse $[AB]$ (un côté du losange) :

$$AB^2 = OA^2 + OB^2$$

$$- AB^2 = 15^2 + 8^2$$

$$- AB^2 = 225 + 64$$

$$- AB^2 = 289$$

$$- AB = \sqrt{289} = 17$$

Le côté du losange mesure 17 cm.

b) Un losange a quatre côtés de même longueur :

$$- P = 4 \times 17 = 68$$

Le périmètre vaut 68 cm.

Piège. Ne pas confondre les diagonales et leurs moitiés : c'est OA et OB qui interviennent dans le calcul, pas AC et BD .

Réponse. a) côté = 17 cm — b) périmètre = 68 cm.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : la cabane de jardin

a) En coupe, le versant relie le faîtage S au bord C du plafond. Le milieu M du plafond est à la verticale de S :

$$- MC = \frac{3}{2} = 1,5, \text{ soit } MC = 1,5 \text{ m ;}$$

$$- MS = 1,2 \text{ m.}$$

Le triangle MSC est rectangle en M (verticale et horizontale), d'hypoténuse $[SC]$:

$$SC^2 = MS^2 + MC^2$$

$$- SC^2 = 1,2^2 + 1,5^2$$

$$- SC^2 = 1,44 + 2,25$$

$$- SC^2 = 3,69$$

$$- SC = \sqrt{3,69} \approx 1,921$$

Un versant mesure environ 1,92 m.

b) Le plancher est un rectangle de 3 m sur 4 m ; sa diagonale d est l'hypoténuse d'un triangle rectangle :

$$d^2 = 3^2 + 4^2$$

$$- d^2 = 9 + 16 = 25$$

$$- d = \sqrt{25} = 5$$

La diagonale du plancher mesure exactement 5 m.

c) La plus grande longueur possible à plat sur le plancher est cette diagonale, soit 5 m. La planche mesure exactement 5 m : elle tient, mais **tout juste**, en la plaçant exactement

d'un coin à l'autre.

Bilan de la méthode. Trois questions, trois triangles rectangles différents : le toit en coupe, le plancher en vue de dessus, et la même diagonale réutilisée pour conclure. Repérer le bon triangle est l'essentiel du travail.

Réponse. a) $\approx 1,92$ m — b) 5 m — c) oui, exactement, en diagonale.