

Plaquette 1 – Translations : lire, construire, calculer

Translations et rotations — Quatrième

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. La translation qui transforme A en B fait glisser toute figure de la même façon : chaque point M a pour image le point M' tel que le glissement de M vers M' soit **identique** à celui de A vers B (même direction, même sens, même longueur).

Dans un repère. Si la translation transforme $A(x_A; y_A)$ en $B(x_B; y_B)$, on calcule une fois pour toutes le déplacement :

$$a = x_B - x_A \quad b = y_B - y_A$$

et l'image M' de n'importe quel point $M(x; y)$ a pour coordonnées :

$$x' = x + a \quad y' = y + b$$

Lecture sur le quadrillage. $a > 0$: on va vers la droite ; $a < 0$: vers la gauche. $b > 0$: vers le haut ; $b < 0$: vers le bas.

Propriété du parallélogramme. Si M' est l'image de M par la translation qui transforme A en B , alors $ABM'M$ est un **parallélogramme** (sauf si les quatre points sont alignés).

Retour en arrière. Pour revenir de M' à M , on applique le glissement **opposé** : $-a$ et $-b$.

Enchaîner deux translations. Un glissement de $(a; b)$ suivi d'un glissement de $(c; d)$ revient à un seul glissement de $(a + c; b + d)$.

Ce qui se conserve : les longueurs, les angles, les aires, l'alignement, le parallélisme. Une figure et son image sont **superposables**.

Correction de l'exercice 1 – Lire le glissement

a) On lit les coordonnées sur le repère : $A(1; 2)$ et $A'(5; 4)$.

— horizontalement : de 1 à 5, on avance de $5 - 1 = 4$ carreaux **vers la droite** ;

— verticalement : de 2 à 4, on monte de $4 - 2 = 2$ carreaux.

b) Le déplacement de la translation s'écrit donc :

$$a = x_{A'} - x_A = 4 \quad b = y_{A'} - y_A = 2$$

C'est la translation « +4 en abscisse, +2 en ordonnée ».

Ce qu'il faut retenir. Ces deux nombres, une fois trouvés, valent pour **tous** les points de la figure : c'est ce qui rend la translation si simple à appliquer.

Réponse. 4 carreaux à droite et 2 vers le haut, soit +4 en abscisse et +2 en ordonnée.

Correction de l'exercice 2 – Appliquer le même glissement

On applique la même règle à chaque point :

$$x' = x + 4 \quad y' = y + 2$$

Image de $B(3; 1)$:

— $x' = 3 + 4 = 7$;

$$- y' = 1 + 2 = 3.$$

Donc $B'(7; 3)$.

Image de $C(0; 5)$:

$$- x' = 0 + 4 = 4 ; y' = 5 + 2 = 7, \text{ donc } C'(4; 7).$$

Image de $D(-2; -1)$:

$$- x' = -2 + 4 = 2 ; y' = -1 + 2 = 1, \text{ donc } D'(2; 1).$$

Piège des nombres négatifs. $-2 + 4$ vaut 2, et non -6 : on **ajoute** 4, on ne l'ajoute pas à la valeur absolue.

Réponse. $B'(7; 3)$, $C'(4; 7)$ et $D'(2; 1)$.

Correction de l'exercice 3 - Un glissement vers la gauche

a) Vers la gauche, l'abscisse **diminue** ; vers le bas, l'ordonnée **diminue**. Le déplacement s'écrit donc :

$$a = -3 \quad b = -2$$

b) On applique $x' = x - 3$ et $y' = y - 2$.

Image de $E(4; 5)$:

$$- x' = 4 - 3 = 1 ; y' = 5 - 2 = 3, \text{ donc } E'(1; 3).$$

Image de $F(1; 0)$:

$$- x' = 1 - 3 = -2 ; y' = 0 - 2 = -2, \text{ donc } F'(-2; -2).$$

À retenir. Les quatre directions se codent par le signe : droite +, gauche -, haut +, bas -. Une fois les signes posés, il n'y a plus qu'une addition à faire.

Réponse. a) -3 et -2 — b) $E'(1; 3)$ et $F'(-2; -2)$.

Correction de l'exercice 4 - La translation qui transforme A en B

Étape 1 : trouver le glissement. Il est donné par le couple $A \rightarrow B$:

$$a = x_B - x_A = 6 - 2 = 4 \quad b = y_B - y_A = 4 - 1 = 3$$

La translation est donc « +4 en abscisse, +3 en ordonnée ».

Étape 2 : l'appliquer à C.

$$- x_C = 1 + 4 = 5 ;$$

$$- y_C = 5 + 3 = 8.$$

L'image de C est le point $C'(5; 8)$.

Contrôle sur la figure. Les deux traits pointillés $[AB]$ et $[CC']$ ont la même longueur et la même direction : c'est bien le même glissement.

Réponse. $C'(5; 8)$.

Correction de l'exercice 5 - Retrouver le point de départ

On connaît l'arrivée et on cherche le départ : il faut faire le glissement **à l'envers**, c'est-à-dire appliquer le déplacement opposé, « -3 en abscisse, $+1$ en ordonnée ».

$$x_M = x_{M'} - 3 \quad y_M = y_{M'} + 1$$

$$- x_M = 7 - 3 = 4 ;$$

$$- y_M = 2 + 1 = 3.$$

Le point cherché est $M(4; 3)$.

Vérification indispensable. On repart de $M(4; 3)$ et on applique la translation : $4 + 3 = 7$ et $3 - 1 = 2$, soit $M'(7; 2)$ ✓

Réponse. $M(4; 3)$.

Correction de l'exercice 6 - Image d'un segment

a) On applique $x' = x + 2$ et $y' = y + 3$ aux deux extrémités :

- $A(1; 1) : 1 + 2 = 3$ et $1 + 3 = 4$, donc $A'(3; 4)$;
- $B(4; 2) : 4 + 2 = 6$ et $2 + 3 = 5$, donc $B'(6; 5)$.

b) Une translation **conserve les longueurs** : le segment glisse sans être ni étiré ni rétréci. Donc :

$$A'B' = AB$$

Contrôle par le calcul. De A à B : 3 à droite et 1 vers le haut. De A' à B' : $6 - 3 = 3$ à droite et $5 - 4 = 1$ vers le haut. Les deux segments ont bien le même écartement, donc la même longueur.

Réponse. a) $A'(3; 4)$ et $B'(6; 5)$ — b) $A'B' = AB$.

Correction de l'exercice 7 - Image d'un triangle

On applique le même glissement aux trois sommets :

$$x' = x + 5 \quad y' = y + 2$$

- $A(1; 1) : 1 + 5 = 6$ et $1 + 2 = 3$, donc $A'(6; 3)$;
- $B(3; 1) : 3 + 5 = 8$ et $1 + 2 = 3$, donc $B'(8; 3)$;
- $C(2; 4) : 2 + 5 = 7$ et $4 + 2 = 6$, donc $C'(7; 6)$.

Le triangle image est $A'B'C'$ avec $A'(6; 3)$, $B'(8; 3)$ et $C'(7; 6)$.

Contrôle de forme. Dans ABC , la base $[AB]$ mesure 2 carreaux ; dans $A'B'C'$, $[A'B']$ mesure $8 - 6 = 2$ carreaux ✓ Les deux triangles sont superposables.

Réponse. $A'(6; 3)$, $B'(8; 3)$ et $C'(7; 6)$.

Correction de l'exercice 8 - Est-ce bien une translation ?

Pour que ce soit une translation, **le glissement doit être le même** pour les trois couples de sommets correspondants.

- de $A(1; 2)$ à $D(6; 4) : 6 - 1 = 5$ et $4 - 2 = 2$, soit $(+5; +2)$;
- de $B(4; 2)$ à $E(9; 4) : 9 - 4 = 5$ et $4 - 2 = 2$, soit $(+5; +2)$;
- de $C(2; 5)$ à $F(7; 6) : 7 - 2 = 5$ et $6 - 5 = 1$, soit $(+5; +1)$.

Le troisième glissement est différent des deux premiers : DEF **n'est pas** l'image de ABC par une translation.

Pour qu'il le soit, le point F devrait avoir pour coordonnées $(7; 7)$.

Méthode. On teste **tous** les couples : deux sommets qui glissent pareil ne suffisent pas à conclure.

Réponse. Non : $C \rightarrow F$ donne $(+5; +1)$ au lieu de $(+5; +2)$.

Correction de l'exercice 9 - Enchaîner deux translations

a) **Première translation.** Image de $M(2; 3)$:

- $2 + 3 = 5$ et $3 + 1 = 4$, donc $M_1(5; 4)$.

Seconde translation. Image de $M_1(5; 4)$:

— $5 + 2 = 7$ et $4 - 4 = 0$, donc $M_2(7; 0)$.

L'image finale est $M_2(7; 0)$.

b) Les deux glissements s'ajoutent, coordonnée par coordonnée :

$$a = 3 + 2 = 5 \quad b = 1 + (-4) = -3$$

Une seule translation « +5 en abscisse, -3 en ordonnée » donne le même résultat.

Vérification. $2 + 5 = 7$ et $3 - 3 = 0$, soit $(7; 0)$ ✓

Réponse. a) $M_2(7; 0)$ — b) la translation $(+5; -3)$.

Correction de l'exercice 10 - Revenir au point de départ

Pour revenir en arrière, il faut annuler le glissement : on applique le déplacement **opposé**, c'est-à-dire l'opposé de chacun des deux nombres.

$$a' = -(-4) = 4 \quad b' = -(+6) = -6$$

Il faut appliquer la translation « +4 en abscisse, -6 en ordonnée ».

Vérification sur un point. Partons de $P(1; 1)$:

— première translation : $1 - 4 = -3$ et $1 + 6 = 7$, donc $(-3; 7)$;

— seconde : $-3 + 4 = 1$ et $7 - 6 = 1$, donc $(1; 1)$ ✓ on est bien revenu.

Lien avec l'exercice précédent. L'enchaînement des deux glissements donne $(-4 + 4; 6 - 6) = (0; 0)$: aucun déplacement.

Réponse. La translation « +4 en abscisse, -6 en ordonnée ».

Correction de l'exercice 11 - Le parallélogramme caché

Par définition de la translation, le glissement de M vers M' est **identique** à celui de A vers B : même direction, même sens, même longueur.

On en déduit deux choses :

- les segments $[AB]$ et $[MM']$ ont la **même longueur** : $AB = MM'$;
- ils ont la **même direction** : les droites (AB) et (MM') sont parallèles.

Or un quadrilatère dont deux côtés opposés sont parallèles **et** de même longueur est un parallélogramme.

Dans le quadrilatère $ABM'M$, les côtés $[AB]$ et $[M'M]$ sont justement opposés : $ABM'M$ est donc un **parallélogramme**.

Attention à l'ordre des lettres. C'est bien $ABM'M$ et non $ABMM'$: en parcourant le contour, on va de A à B , puis de B à M' , de M' à M et de M à A . Écrit dans le mauvais ordre, le quadrilatère serait croisé.

Réponse. $AB = MM'$ et $(AB) \parallel (MM')$: deux côtés opposés parallèles et de même longueur.

Correction de l'exercice 12 - La frise

a) On ajoute 4 à l'abscisse à chaque étape, l'ordonnée ne change pas :

— $P_2(2 + 4; 3) = P_2(6; 3)$;

— $P_3(6 + 4; 3) = P_3(10; 3)$;

— $P_4(10 + 4; 3) = P_4(14; 3)$.

b) Pour aller de P_1 à P_{10} , on applique la translation 9 fois (et non 10 : il y a 9 intervalles

entre le 1^{er} et le 10^e motif). Le glissement total vaut donc :

$$9 \times 4 = 36$$

$$- x_{P_{10}} = 2 + 36 = 38 ;$$

$$- y_{P_{10}} = 3.$$

Le dixième motif est en $P_{10}(38; 3)$.

Le piège classique. Compter $10 \times 4 = 40$ donnerait le onzième motif. Entre le premier et le dixième, il y a $10 - 1 = 9$ sauts.

Réponse. a) $P_2(6; 3)$, $P_3(10; 3)$, $P_4(14; 3)$ — b) $P_{10}(38; 3)$.

Correction de l'exercice 13 - Corriger une erreur

L'élève a **échangé les deux nombres** : il a ajouté -2 à l'abscisse et $+5$ à l'ordonnée, alors que c'est l'inverse.

L'ordre est imposé : le premier nombre agit sur l'**abscisse** (le déplacement horizontal), le second sur l'**ordonnée** (le déplacement vertical).

$$x' = x + 5 \quad y' = y - 2$$

$$- x' = -3 + 5 = 2 ;$$

$$- y' = 4 - 2 = 2.$$

L'image est $K'(2; 2)$.

Comment éviter l'erreur. On se répète la phrase avant de calculer : « $+5$ vers la droite, 2 vers le bas ». Dit ainsi, il n'y a plus d'ambiguïté sur ce qui bouge.

Réponse. Il a inversé les deux nombres : $K'(2; 2)$.

Correction de l'exercice 14 - Sans repère

a) Une translation **conserve les longueurs** : chaque côté de l'image a la même longueur que le côté correspondant.

$$- A'B' = AB = 5 \text{ cm} ;$$

$$- B'C' = BC = 7 \text{ cm} ;$$

$$- C'A' = CA = 4 \text{ cm}.$$

b) Le périmètre est la somme des trois côtés :

$$- P_{ABC} = 5 + 7 + 4 = 16 \text{ cm} ;$$

$$- P_{A'B'C'} = 5 + 7 + 4 = 16 \text{ cm}.$$

Les deux périmètres sont égaux, ce qui était prévisible : si chaque côté garde sa longueur, leur somme aussi.

Plus généralement. Une figure et son image par une translation sont **superposables** : tout ce qui se mesure sur l'une se retrouve à l'identique sur l'autre.

Réponse. a) 5 cm, 7 cm et 4 cm — b) oui, 16 cm dans les deux cas.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : quatre images

On applique à chaque fois $x' = x + a$ et $y' = y + b$.

$$\text{a) } 3 + 2 = 5 \text{ et } 5 + 4 = 9 : \text{ l'image est } A'(5; 9).$$

$$\text{b) } -1 + 6 = 5 \text{ et } 2 - 3 = -1 : \text{ l'image est } B'(5; -1).$$

$$\text{c) } 4 - 7 = -3 \text{ et } -2 + 1 = -1 : \text{ l'image est } C'(-3; -1).$$

d) Il faut d'abord trouver le glissement à partir du couple $E \rightarrow F$:

$$a = -1 - 2 = -3 \quad b = 5 - 3 = 2$$

Puis on l'applique à $D(0; 0)$: $0 - 3 = -3$ et $0 + 2 = 2$, donc $D'(-3; 2)$.

Ce que montre d). L'image de l'origine a toujours pour coordonnées celles du glissement lui-même : c'est un bon moyen de contrôler qu'on l'a bien calculé.

Réponse. a) $(5; 9)$ — b) $(5; -1)$ — c) $(-3; -1)$ — d) $(-3; 2)$.